

$xf(x)+2f(1-x)=x^2+6$

$\sqrt{x^2+(8-y)^2}+\sqrt{y^2+(6-x)^2}$

$F_n \approx \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$

$-\frac{b}{2a}$

$\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{AD}$

Jaunajam matematikui

$f(x)=|x-1|+|x+1|$

$\pi^2(k+1)^2-\pi^2k^2=\pi^2(2k+1)$

$1=4\sin\frac{\pi}{10}\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{10}\right)$

$m_3=m_{12}+m_{13}+m_{23}$

LIETUVOS
JAUNŲJŲ
MATEMATIKŲ
MOKYKLA

LJMM

LIETUVOS
JAUNŲJŲ
MATEMATIKŲ
MOKYKLA

Jaunajam matematikui

1

1998–2000 metų
Lietuvos jaunųjų
matematikų mokyklos
užduotys ir sprendimai

Danieliaus  leidykla

Vilnius, 2001

UDK 51[075-3]
Ip-14

Leidinio sudarytojai:
Antanas APYNIS
Eugenijus STANKUS
Juozas ŠINKŪNAS

Leidinį recenzavo Marytė STRIČKIENĖ

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos rekomenduota
2001 01 25 Nr. 56

Išleido DANIELIAUS leidykla, SL 1368
Išleido ir spausdino IĮ „Petro ofsetas", Žalgirio g. 90, Vilnius
Užsakymas 71

ISBN 9986-442-99-0

TURINYS

PRATARMĖ

1969–1989 metais veikė Lietuvos jaunųjų matematikų neakivaizdinė mokykla, nemažai prisidėjusi prie matematinės kultūros kėlimo. 1998 m. rugsėjo mėnesį jaunųjų matematikų mokykla buvo atkurta ir vėl sėkmingai dirba, tęsdama ankstesnės mokyklos tradicijas.

1998 metais iš 613 moksleivių atsiuntusių stojamosios užduoties sprendimus, į pirmą kursą buvo priimti 563. Įstojusieji per dvejus metus turėjo įvykdyti mokymo programą, t.y. išspręsti septynias užduotis. Paskutiniąją– baigiamąją užduotį Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete sprendė 230 moksleivių. Mokyklos baigimo pažymėjimai buvo įteikti 229 mokiniams. Dabar daugelis iš jų mokosi universitetuose bei kitose aukštosiose mokyklose.

Mokyklos taryba sudarydama mokymo programą siekė ne tik pagilinti moksleivių mokyklinės matematikos žinias, bet ir jas išplėsti. Į programą buvo įtrauktos ir temos, nenagrinėjamos vidurinėje mokykloje, pavyzdžiui, rekurenčiosios sekos, grafų teorijos elementai, sveikoji ir trupmeninė skaičiaus dalys.

Šiame leidinyje pateikiamos Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos pirmosios laidos (1998–2000) užduotys, teorinė medžiaga bei užduočių sprendimai. Manome, kad knygelė bus naudinga ir moksleiviams, besidomintiems matematika, ir mokytojams, vedantiems matematikos būrelius, rengiantiems moksleivius konkursams, olimpiadoms.

Sudarytojai nuoširdžiai dėkoja visiems autoriams už kruopštų darbą rengiant užduotis.

Sudarytojai A.Apynis, E.Stankus, J.Šinkūnas

Metodinė medžiaga ir užduotys



STOJAMOJI UŽDUOTIS

A.Apynis, E.Stankus (Vilniaus universitetas),
J.Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Iš vietovių A ir B vienas priešais kitą vienu metu išėjo du turistai ir susitiko po 3 h 20 min. Per kiek laiko kiekvienas turistas įveikė atstumą tarp A ir B, jeigu pirmasis turistas į vietovę B atvyko 5 h vėliau negu antrasis atvyko į vietovę A?

2. Broliai Rolandas ir Antanas iš namų kartu išėjo į mokyklą. Rolando žingsnis 10 % ilgesnis už Antano žingsnį, tačiau Antanas per tą patį laiką žengia 10 % daugiau žingsnių negu Rolandas. Kuris brolis į mokyklą ateis anksčiau?

3. Garsaus prancūzų matematiko, gyvenusio antrajame tūkstantmetyje, gimimo metai pasižymi šitokiomis savybėmis:
1) gimimo metų skaitmenų suma lygi 21;
2) prie gimimo metų pridėjus skaičių 5355, gaunamas skaičius, sudarytas iš tų pačių skaitmenų kaip ir gimimo metai, tik parašytas atvirkščia tvarka.

Kuriais metais gimė šis matematikas? Gal žinote jo pavardę?

4. Apskaičiuokite $x^8 + \dfrac{1}{x^8}$, jeigu $x + \dfrac{1}{x} = 3$.

5. Išspręskite lygtį

$$1 + \frac{x}{x-1} + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x}{x-1}\right)^7 = 0.$$

6. Raskite reiškinio

$$\sqrt{x^2 + (8-y)^2} + \sqrt{y^2 + (6-x)^2}$$

mažiausią reikšmę.

7. Įrodykite, kad su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi n reiškinio $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ reikšmė yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

8. Įrodykite, kad

$$\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ = 1.$$

9. Į apskritimą įbrėžta trapecija, kurios aukštinė lygi h, o šoninė kraštinė iš apskritimo centro matoma 60° kampu. Apskaičiuokite šios trapecijos plotą.

10. Ar yra toks trikampis, kurio visos aukštinės trumpesnės už vieną centimetrą, o plotas didesnis už vieną kvadratinį metrą?

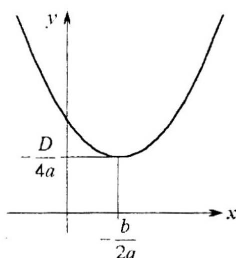


I. KVADRATINIS TRINARIS

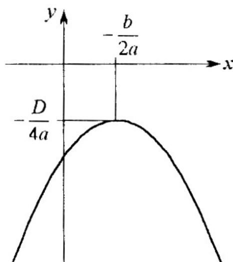
J.Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

Trumpai prisiminsime kvadratinio trinario $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ savybes. Kai kurios iš jų moksleiviams gali būti nežinomos.

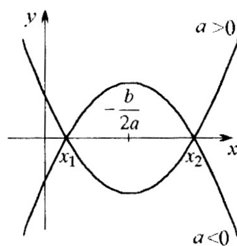
1. Kvadratinio trinario grafikas – parabolė, kurios viršūnė yra taške $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{D}{4a}\right)$ (čia $D=b^2-4ac$ – kvadratinio trinario diskriminantas), o šakos nukreiptos į viršų, kai $a>0$ ir į apačią, kai $a<0$ (1 pav., 2 pav., 3 pav.).



1 pav. ($a>0, D<0$)



2 pav. ($a<0, D<0$)



3 pav. ($D>0$)

2. Iš pateiktų grafikų matome, kad funkcija $f(x)=ax^2+bx+c$:

1) intervale $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$ mažėja nuo $+\infty$ iki $-\frac{D}{4a}$, o intervale $\left[-\frac{b}{2a};+\infty\right)$ didėja nuo $-\frac{D}{4a}$ iki $+\infty$, kai $a>0$. Taigi šiuo atveju funkcija taške $x=-\frac{b}{2a}$ įgyja mažiausią reikšmę, lygią $-\frac{D}{4a}$. Funkcijos reikšmių aibė yra intervalas $\left[-\frac{D}{4a};+\infty\right)$.

2) intervale $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ didėja nuo $-\infty$ iki $-\frac{D}{4a}$, o intervale $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ mažėja nuo $-\frac{D}{4a}$ iki $-\infty$, kai $a < 0$. Taigi funkcija taške $x = -\frac{b}{2a}$ įgyja maksimumą. Funkcijos reikšmių aibė yra intervalas $\left(-\infty; -\frac{D}{4a}\right]$.

3. Kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c$ šaknys yra realios ir skirtingų ženklų, kai $a \cdot c < 0$.

4. Remiantis grafikais (1–3 pav.), nesunku įsitikinti tokių savybių teisingumu:

1) su visomis x reikšmėmis sandauga $a \cdot f(x) = a \cdot (ax^2 + bx + c)$ yra teigiama, kai $D < 0$;

2) kai $D > 0$, tai $a \cdot f(x) > 0$ su $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ ir $a \cdot f(x) < 0$ su $x \in (x_1; x_2)$.

Iš pirmosios savybės išplaukia išvada: jeigu yra bent vienas skaičius r, su kuriuo

$$a \cdot f(r) = a \cdot (ar^2 + br + c) < 0,$$

tai kvadratinio trinario diskriminantas D teigiamas.

1 pavyzdys. Rasime su kuria k reikšme kvadratinio trinario $f(x) = kx^2 + 2x + 6$ didžiausia reikšmė intervale $\left[-\frac{1}{k}; 2 - \frac{1}{k}\right]$ lygi 3.

Sprendimas. Nagrinėsime du atvejus:

1) kai $k > 0$, parabolės $y = kx^2 + 2x + 6$ viršūnės abscisė lygi $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{k}$. Ji sutampa su duotojo intervalo kairiuoju galu. Vadinasi, šiuo atveju kvadratinis trinaris intervale $\left[-\frac{1}{k}; 2 - \frac{1}{k}\right]$ didėja ir įgyja didžiausią reikšmę dešiniajame intervalo gale.

Taigi

$$f_{\max}\left(2-\frac{1}{k}\right)=k\left(2-\frac{1}{k}\right)^2+2\left(2-\frac{1}{k}\right)+6=4k-\frac{1}{k}+6.$$

Pagal sąlygą $4k-\frac{1}{k}+6=3$. Iš čia randame $k=\frac{1}{4}$. Taigi, kai $k=\frac{1}{4}$, kvadratinio trinario $f(x)=kx^2+2x+6$ didžiausia reikšmė intervale $\left[-\frac{1}{k};2-\frac{1}{k}\right]$ lygi 3.

2) kai $k<0$, funkcija $\left[-\frac{1}{k};2-\frac{1}{k}\right]$ intervale $\left[-\frac{1}{k};2-\frac{1}{k}\right]$ mažėja ir didžiausią reikšmę įgyja kairiajame šio intervalo taške. Taigi

$$f_{\min}\left(-\frac{1}{k}\right)=k\left(-\frac{1}{k}\right)^2+2\left(-\frac{1}{k}\right)+6=6-\frac{1}{k}.$$

Pagal sąlygą $6-\frac{1}{k}=3$. Iš čia gauname $k=\frac{1}{3}$. Kadangi rastoji k reikšmė teigiama, tai darome išvadą, kad nėra tokių neigiamų k reikšmių, su kuriomis kvadratinis trinaris intervale $\left[-\frac{1}{k};2-\frac{1}{k}\right]$ įgytų didžiausią reikšmę, lygią 3.

5. Sprendžiant kvadratines lygtis ar nelygybes su parametrais dažnai tenka nustatinėti realiojo skaičiaus r padėtį kvadratinio trinario ax^2+bx+c šaknų x_1 ir x_2 ($x_1 \le x_2$) atžvilgiu:

1) Skaičius r priklauso intervalui $(-\infty; x_1)$ (4 pav.) tik tada, kai

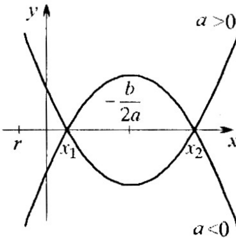
$$\begin{cases} af(r)>0, \\ r<-\dfrac{b}{2a}, \\ D\ge 0. \end{cases} \qquad (1)$$

2) Skaičius r priklauso intervalui $(x_1; x_2)$ (5 pav.) tik tada, kai

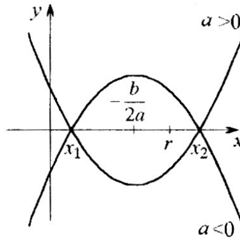
$$a\cdot f(r)<0 \qquad (2)$$

3) Skaičius r priklauso intervalui $(x_2; +\infty)$ (6 pav.) tik tada, kai

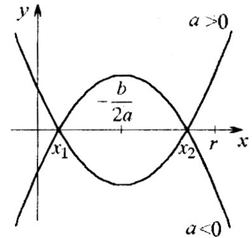
$$\begin{cases} a\,f(r) > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < r, \\ D \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$



4 pav.



5 pav.



6 pav.

2 pavyzdys. Rasime su kuriomis k reikšmėmis kvadratinės lygties

$$(1+k)x^2 - 3kx + 4k = 0$$

abu sprendiniai yra didesni už 1.

Sprendimas. Remsimės (1) sąlygų sistema:

$$\begin{cases} (1+k)\left((1+k)\cdot 1^2 - 3k\cdot 1 + 4k\right) > 0, \\ 1 < \dfrac{3k}{2(1+k)}, \\ (3k)^2 - 4(1+k)4k \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Išsprendę šią sistemą, gauname:

$$-\frac{16}{7} \leq k < -1.$$

Taigi, kai $k \in \left[-\frac{16}{7}; -1\right)$, kvadratinės lygties $(1+k)x^2 - 3kx + 4k = 0$ sprendiniai yra didesni už 1.

3 pavyzdys. Rasime su kuriomis p reikšmėmis skaičius 5 yra tarp kvadratinio trinario

$$x^2 - 2(p-1{,}5)x + p^2 - 4p$$

šaknų.

Sprendimas. Remsimės (2) nelygybe:

$$1 \cdot \left(5^2 - 2(p-1{,}5)\cdot 5 + p^2 - 4p\right) < 0.$$

Išsprendę nelygybę, gauname: $p \in (4; 10)$.

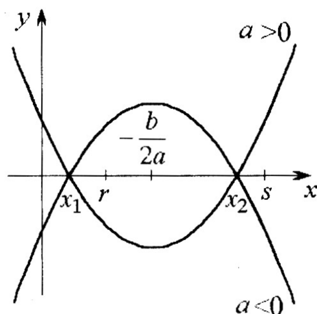
6. Nesunku ištirti dviejų skaičių r ir s ($r<s$) išsidėstymą kvadratinio trinario šaknų x_1 ir x_2 ($x_1 \le x_2$) atžvilgiu:

1) $x_1 < r < x_2 < s$ (7 pav.) tik tada, kai

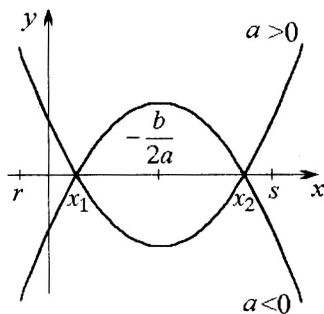
$$\begin{cases} a \cdot f(r) < 0, \\ a \cdot f(s) > 0. \end{cases} \tag{5}$$

2) $r < x_1 \le x_2 < s$ (8 pav.) tik tada, kai

$$\begin{cases} a \cdot f(r) > 0, \\ a \cdot f(s) > 0, \\ r < -\dfrac{b}{2a} < s, \\ D \ge 0. \end{cases} \tag{6}$$



7 pav.



8 pav.

Užduotis. Savarankiškai raskite sąlygas, su kuriomis teisingos nelygybės:

1) $x_1 \le x_2 < r < s$, 2) $r < x_1 < s < x_2$,

3) $r < s < x_1 \le x_2$, 4) $x_1 < r < s < x_2$.

4 pavyzdys. Rasime su kuriomis m reikšmėmis lygties $mx^2 - (1-2m)x + m = 0$ sprendiniai tenkina sąlygą: $x_1 < -5 < x_2 < 0$.

Sprendimas. Remsimės (5) sąlygomis:

$$\begin{cases} m \cdot \left(m \cdot (-5)^2 - (1-2m) \cdot (-5) + m \right) < 0, \\ m \cdot \left(m \cdot 0^2 - (1-2m) \cdot 0 + m \right) > 0. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą, gauname $m \in \left(-\frac{5}{16}; 0 \right)$. Taigi, kai $m \in \left(-\frac{5}{16}; 0 \right)$, nagrinėjamos lygties abu sprendiniai yra neigiami, o skaičius -5 yra tarp jų.

5 pavyzdys. Rasime su kuriomis p reikšmėmis lygtis $\frac{1}{\sqrt{px}} = \frac{1}{x+1}$ turi vienintelį sprendinį.

Sprendimas. Kadangi $x + 1 > 0$, tai ši lygtis ekvivalenti šitokiai sistemai:

$$\begin{cases} (x+1)^2 = p \cdot x, \\ x + 1 > 0, \end{cases} \quad \text{t.y.} \quad \begin{cases} x^2 + (2-p)x + 1 = 0, \\ x > -1. \end{cases}$$

Gauta sistema, o tuo pačiu ir duotoji lygtis, gali turėti vienintelį sprendinį, kai šios sistemos lygties diskriminantas lygus nuliui arba vienas sprendinys yra mažesnis, o kitas didesnis už -1.

1 atvejis. Kai $D = (2-p)^2 - 4 = 0$, gauname p reikšmes: $p = 0$ ir $p = 4$. Kadangi $p \cdot x > 0$, tai imsime tik $p = 4$. Šią reikšmę įrašę į lygtį, gauname $x^2 - 2x + 1 = 0$. Šios lygties sprendinys: $x = 1$.

2 atvejis. Kadangi skaičius -1 turi būti tarp lygties $x^2 + (2-p)x + 1 = 0$ sprendinių, tai remdamiesi (2) nelygybe, gauname:

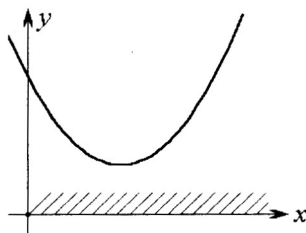
$1 \cdot \left((-1)^2 + (2-p) \cdot (-1) + 1 \right) \leq 0$. Iš čia: $p \leq 0$. Kadangi turi būti $p \neq 0$, tai nagrinėjamoji lygtis turi vienintelį sprendinį, kai $p \in (-\infty; 0) \cup \{4\}$.

6 pavyzdys. Rasime su kuriomis m reikšmėmis nelygybė $mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$ teisinga su visomis teigiamomis x reikšmėmis.

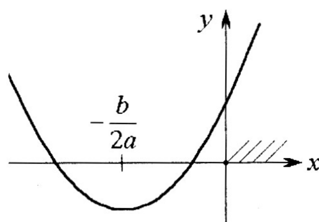
Sprendimas.

a) kai $m \neq 0$, reikia ištirti dvi galimybes:

1) $m > 0$ ir $D < 0$ (9 pav.);



9 pav.



10 pav.

2) $m > 0$ ir $D \geq 0$, $-\dfrac{b}{2a} < 0$ ir $m \cdot f(0) > 0$ (10 pav.).

Pirmuoju atveju sprendžiame sistemą: $\begin{cases} m > 0, \\ 4 - m(3m+1) < 0. \end{cases}$

Gauname $m \in (1; +\infty)$.

Antruoju atveju gauname sistemą: $\begin{cases} m > 0, \\ 4 - m(3m+1) \geq 0, \\ \dfrac{2}{m} < 0, \\ m(3m+1) > 0, \end{cases}$

neturinčią sprendinių.

b) kai $m = 0$, gauname nelygybę $-4x + 1 > 0$, kuri teisinga ne su visomis $x > 0$ reikšmėmis.

Ats.: $m \in (1; +\infty)$.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Raskite skaičius a, b ir c, kurių suma lygi 2, o lygtis $ax^2 + bx + c = 0$ turi vienintelį sprendinį $x = 2$.

2. Raskite didžiausią sumos $p + q$ reikšmę, kai kvadratinio trinario $x^2 + px + q$ šaknų skirtumas lygus 5, o šaknų kubų skirtumas 35.

3. Raskite funkcijos $y = \sqrt{x^2 + 2x + 10}$ reikšmių sritį.

4. Su kuria neigiama parametro a reikšme kvadratinio trinario $ax^2 + 2x + 7{,}5$ mažiausia reikšmė intervale $\left[1 - \frac{1}{a}; \frac{3}{2} - \frac{1}{a}\right]$ yra lygi 3,5?

5. Iš Molėtų į Giedraičius išėjo pėstysis, o po 3,5 h išvažiavo dviratininkas, kuris pėstįjį pavijo Giedraičiuose. Kitą dieną vienu metu dviratininkas išvyko iš Molėtų, o pėstysis iš Giedraičių ir po 1 h 40 min susitiko. Kiek laiko reikia dviratininkui nuvykti iš Molėtų į Giedraičius (dviratininko ir pėsčiojo greičiai pastovūs)?

6. Du darbininkai turėjo nušienauti pievą. Jie susitarė nušienauti po pusę pievos. Pirmasis darbininkas darbą pradėjo 2 h 16 min anksčiau už antrąjį. Iki 12 valandos jie nušienavo 40 % pievos, tada jie pietavo ir ilsėjosi 1,5 h. Pirmasis darbininkas darbą baigė 19 h 54 min, o antrasis – 20 h 10 min. Kada kiekvienas darbininkas pradėjo šienauti pievą?

7. Šachmatų turnyre dalyvavo du devintokai ir keletas dešimtokų. Abu devintokai kartu surinko 8 taškus, o kiekvienas dešimtokas surinko po vienodą taškų skaičių. Kiek dešimtokų dalyvavo turnyre?

Pastaba. Visi turnyro dalyviai susitiko tarpusavyje po vieną kartą. Už laimėtą partiją šachmatininkui skiriamas vienas taškas, už lygiąsias – pusė taško, o už pralaimėtą partiją – nulis.

8. Su kuriomis k reikšmėmis abi kvadratinio trinario $(1+k)x^2 - 2x + k - 2$ šaknys yra teigiamos?

9. Su kuriomis m reikšmėmis lygties

$$(m+2)\,x^2 - 2\,(3m+10)\,x + 3\,(3m+4) = 0$$

sprendiniai yra tarp 0 ir 4?

10. Parašykite didėjimo tvarka skaičius x_1, x_2 0 ir 2, jeigu x_1 ir x_2 yra kvadratinio trinario $x^2 - 2ax + 2a^2 - 4a + 3$ šaknys. Ištirkite šių skaičių išsidėstymo priklausomybę nuo parametro a reikšmių.



II. REKURENČIOSIOS SEKOS

G. Stepanauskas (Vilniaus universitetas)

1. Nagrinėkime skaičių seką

$$u_1\,,\ u_2\,,\ \ldots\,,\ u_n\,,\ \ldots \qquad (1)$$

Sekos, kurių kiekvienas narys u_n yra kokia nors prieš jį einančių narių funkcija, vadinamos *rekurenčiomis sekomis*. Jeigu galima surasti k pastovių skaičių $a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots\,,\ a_k$, kuriems lygybė

$$u_{n+k} = a_1\, u_{n+k-1} + a_2\, u_{n+k-2} + \ldots + a_k\, u_n \qquad (2)$$

yra teisinga su visais natūraliaisiais skaičiais n, tai (1) seka vadinama *k-osios eilės rekurenčiąja seka.*

k-osios eilės rekurenčiosios sekos apibrėžime slypi indukcinė idėja. Žinodami pirmuosius k narių iš (2) lygybės galime surasti $k+1$-ąjį narį. Suradę $k+1$-ąjį, jau galime surasti $k+2$-ąjį ir t.t. Norint surasti bet kurį k-osios eilės rekurenčiosios sekos narį, pakanka žinoti jos pirmuosius k narių ir rekurenčiąją seką apibrėžiančią (2) lygybę.

2. Skaičių seka $b_1\,,\ b_2\,,\ \ldots\,,\ b_n\,,\ \ldots$ vadinama *geometrine progresija*, jei

$$b_{n+1} = b_n q\,,\quad n = 1, 2, \ldots\,. \qquad (3)$$

Čia q yra pastovus skaičius ir vadinamas *progresijos vardikliu.*

Iš (3) lygybės matyti, kad geometrinė progresija yra 1-osios eilės rekurenčioji seka.

3. Skaičių seka $v_1\,,\ v_2\,,\ \ldots\,,\ v_n\,,\ \ldots$ vadinama *aritmetine progresija*, jei

$$v_{n+1} = v_n + d\,,\quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Čia d yra pastovus skaičius ir vadinamas *progresijos skirtumu.*

Kadangi

$$v_{n+2} = v_{n+1} + d = v_{n+1} + (v_{n+1} - v_n) = 2v_{n+1} - v_n\,,$$

tai aritmetinė progresija yra 2-osios eilės rekurenčioji seka.

Aritmetinių ir geometrinių progresijų savybės moksleiviams turėtų būti gana gerai žinomos, todėl jų detaliau čia nenagrinėsime.

4. Pereikime prie 2-osios eilės rekurenčiosios sekos $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$, kai jos n+2-asis narys yra lygus dviejų prieš jį einančių narių sumai

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \tag{4}$$

Be to, tegul $F_1 = F_2 = 1$. Ši seka vadinama *Fibonačio seka*, o jos nariai *Fibonačio skaičiais*.

Iš (4) lygybės, žinodami, kad $F_1 = F_2 = 1$, surandame pirmuosius Fibonačio skaičius:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597

Fibonačio skaičiai yra daug kur sutinkami. Pirmiausia jie taikomi įvairiose skaičių teorijos srityse. Be jų neapsieinama kombinatorikoje. Žinios apie juos taikomos informatikoje, geometrijoje, lošimų teorijoje, fizikoje ir kitur. Fibonačio skaičiai sutinkami įvairiuose gamtos reiškiniuose.

5. Panagrinėkime vieną kombinatorikos uždavinėlį. Takelis, vedantis prie tvenkinio, padalytas į lygius vienas paskui kitą einančius stačiakampius laukelius (takelio plotis lygus laukelio pločiui). Takeliu link vandens šokuoja varlytė. Varlytė gali šokti į gretimą laukelį arba vieną laukelį peršokti. Keliais skirtingais būdais varlytė gali nušokuoti n laukelių ilgio takelį, t.y. (jeigu laukelius sunumeruosime) patekti iš pirmojo laukelio į n-ąjį? Šokavimo būdai yra laikomi vienodais, jei šokuodama varlytė pabuvoja tuose pačiuose laukeliuose.

Ieškomąjį skaičių pažymėkime x_n. Kadangi varlytė kelionę pradeda iš pirmojo laukelio, tai $x_1 = 1$. Iš pirmojo laukelio patekti į antrąjį galima vieninteliu būdu, taigi ir $x_2 = 1$. Į trečiąjį laukelį galima patekti dviem būdais – tiesiai iš pirmojo (peršokant antrąjį) arba pabuvojant ir antrajame: $x_3 = 2$.

Visus būdus, kuriais galima patekti į n-ąjį laukelį, suskirstykime į dvi grupes. Pirmajai grupei priskirkime būdus, kai varlytė pabuvoja

$n-1$-ajame laukelyje, o antrajam, kai varlytė į n-ąjį laukelį pakliūva tiesiai iš $n-2$-ojo laukelio, peršokdama $n-1$-ąjį. Gaunome, kad

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Taigi įrodėme, kad skaičiai x_n yra lygūs Fibonačio skaičiams: $x_n = F_n$.

6. Fibonačio skaičiai turi įdomių savybių. Pateiksime keletą iš jų. Fibonačio skaičiams yra teisingos tokios lygybės:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1,$$
$$F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n},$$
$$F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1,$$
$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1},$$
$$F_{n+m} = F_{n-1} F_m + F_n F_{m+1} \quad (n>1).$$

Įrodykime pirmąją. Iš tikrųjų

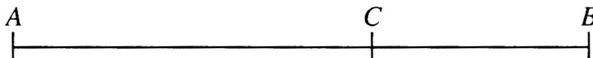
$$F_1 = F_3 - F_2,$$
$$F_2 = F_4 - F_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n,$$
$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}.$$

Sudėję panariui visas šias lygybes, gausime norimą lygybę:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1.$$

7. Paimkime atkarpą AB, kurios ilgis lygus 1, ir padalykime į dvi dalis – ilgesniąją AC ir trumpesniąją CB (*žr.* 1 pav.) taip, kad visos atkarpos ir ilgesniosios jos dalies santykis būtų lygus ilgesniosios ir trumpesniosios dalių ilgių santykiui: $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$. Tegu $AC = x$, tada

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \quad \text{arba} \quad x^2 = 1 - x.$$



1 pav.

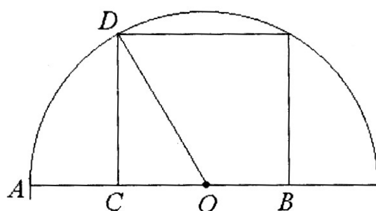
Šios lygties teigiamas sprendinys yra lygus $(\sqrt{5}-1)/2$. Pažymėkime santykį $\frac{1}{x}$ raide α. Tuomet $\alpha=\frac{1}{x}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Skaičius α yra susijęs su Fibonačio skaičiais šia formule:

$$F_n \approx \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}.$$

Iš tikrųjų α yra vienas labiausiai matematikoje sutinkamų skaičių ir žinomas *aukso pjūvio* arba *auksinės proporcijos* vardu.

8. Auksinė proporcija dažnai sutinkama geometrijoje. Pavyzdžiui, įbrėžkime į pusapskritimį, kurio spindulys R, kvadratą (*žr.* 2 pav.). Tuomet taškas C yra atkarpos AB aukso pjūvio taškas.



2 pav.

Įrodysime tai. Tegu $OC=y$. Tuomet iš stataus trikampio OCD gausime, kad

$$OC^2+CD^2=OD^2,$$
$$y^2+(2y)^2=R^2,$$
$$y=R/\sqrt{5}.$$

Dabar įrodysime, kad

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{AC}. \tag{5}$$

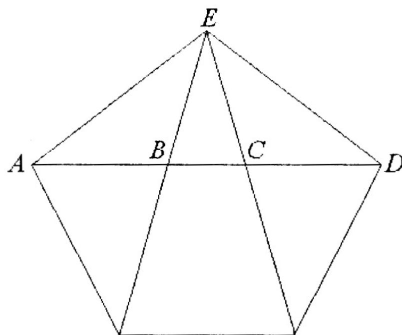
Įstatę pažymėjimus ir atlikę ekvivalenčius pertvarkymus gauname, kad (5) lygybė yra ekvivalenti tokioms lygybėms:

$$\frac{R+y}{2y}=\frac{2y}{R-y},$$

$$(R+y)(R-y)=4y^2,$$
$$R^2-y^2=4y^2,$$
$$R^2-R^2/5=4R^2/5,$$
$$4R^2/5=4R^2/5.$$

Taigi (5) lygybė teisinga. Taškas C yra atkarpos AB aukso pjūvio taškas.

9. Daug auksinių proporcijų galima surasti taisyklingajame penkiakampyje (*žr.* 3 pav.). Taškas C yra atkarpos AD aukso pjūvio taškas, taškas B yra atkarpos AC aukso pjūvio taškas, o atkarpų AD ir AE santykis taip pat yra lygus α.



3 pav.

Su rekurenčiosiomis sekomis, Fibonačio skaičiais, aukso pjūviu ir panašiais dalykais moksleiviai gali plačiau susipažinti pateiktoje literatūroje.

Literatūra

1. G. Stepanauskas. Fibonačio skaičiai. Alfa plius omega matematikos žurnalas, 1998 m. Nr.2(6), 78-84 psl.
2. P. Tannenbaumas ir R. Arnoldas. Kelionės į šiuolaikinę matematiką. V. TEV, 1995.
3. A. Kudžmienė ir R. Kudžma. Sekos, V. „Leidybos centras“, 1995.
4. А. И. Маркушевич. Возвратные последовательности, М. „Наука“, 1983.
5. Н. Н. Воробьев. Числа Фибоначчи, М. „Наука“, 1978.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Įrodykite, kad natūraliųjų skaičių kvadratų seka

$$u_1 = 1^2,\ u_2 = 2^2,\ \dots,\ u_n = n^2,\ \dots$$

yra 3-iosios eilės rekurenčioji seka.

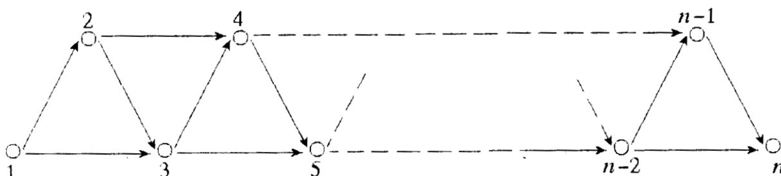
2. Begalinės geometrinės progresijos su vardikliu, kurio modulis mažesnis už 1, suma yra lygi 12, o pirmųjų trijų progresijos narių suma yra lygi 10,5. Raskite šios progresijos pirmąjį narį ir vardiklį.

3. Trikampio kraštinių ilgiai sudaro didėjančią geometrinę progresiją. Ar šios progresijos vardiklis gali būti didesnis už 2?

4. Raskite visų triženklių skaičių, kurie dalijasi iš 7, sumą.

5. Tinklinio pirmenybėse dalyvavo 12 komandų. Komandos susitiko tarpusavyje po vieną kartą. Už laimėjimą komandai skiriamas vienas taškas, už pralaimėjimą taškų neskiriama, lygiųjų tinklinyje nebūna. Po pirmenybių paaiškėjo, kad komandų surinkti taškai sudaro aritmetinę progresiją. Kiek taškų surinko paskutinę vietą užėmusi komanda?

6. Duotas grafas (*žr.* 4 pav.). Įrodykite, kad skirtingų maršrutų iš 1-osios viršūnės į n-ąją skaičius yra lygus n-ajam Fibonačio skaičiui F_n. Galima judėti rodyklių kryptimis.



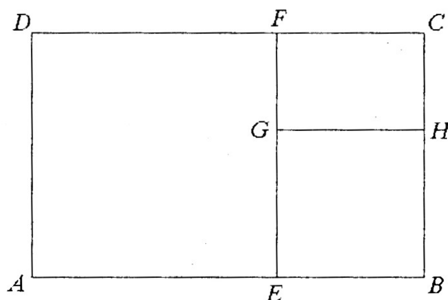
4 pav.

7. Įrodykite, kad Fibonačio skaičiams F_n yra teisinga lygybė

$$F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

8. Petras paprašė Povilo užpildyti skaičiais dešimt eilučių. Į pirmąją ir antrąją eilutes įrašyti bet kokius natūraliuosius skaičius, o į kiekvieną kitą eilutę (pradedant trečiąja) – dviejų prieš jį esančių eilučių sumą. Petras paprašė jam parodyti tik septintąją eilutę. Įdėmiai į ją pažiūrėjęs jis pasakė kam lygi visų dešimties eilučių suma. Kokiu būdu Petras, žinodamas tik septintąją eilutę, galėjo suskaičiuoti visų dešimties eilučių sumą?

9. Jei stačiakampio (žr. 5 pav.) kraštinių santykis yra lygus α



5 pav.

($\alpha = (1+\sqrt{5})/2$), tai stačiakampis vadinamas *auksinės proporcijos stačiakampiu*. Į auksinės proporcijos stačiakampį *ABCD* įbrėžkime kvadratą *AEFD* (žr. 5 pav.). Įrodykite, kad stačiakampis *EFCB* taip pat yra auksinės proporcijos stačiakampis, o jeigu *EGHB* – kvadratas, tai *GHCF* – irgi auksinės proporcijos stačiakampis.

10. Įrodykite, kad apie taisyklingąjį dešimtkampį apibrėžto apskritimo spindulio ir šio dešimtkampio kraštinės santykis yra lygus α ($\alpha = (1+\sqrt{5})/2$).



3 tema. ELEMENTARINĖS MATEMATIKOS UŽDAVINIŲ SPRENDIMO METODAI

R. Kašuba (Vilniaus universitetas)

3. 1. KELI ŽODŽIAI APIE INVARIANTUS

Invariantas, jeigu jį verstume iš lotynų kalbos – kone visų Europos ir ne tik jos kalbų motinos – reikštų „nesikeičiantis“, „nekintantis“.

Aplinkui mus visa taip smarkiai nestygsta, juda, kinta, taip nestovi vietoje, kad galėtų atrodyti, kad iš viso nėra nekintančių dalykų. Tačiau, kita vertus, jeigu esama ne tik daugiau, bet ir mažiau bekintančių dydžių, todėl logiška būtų galvoti, kad galėtų būti ir visai nekintančių. Įtarimas yra pagrįstas ne tik logika, bet ir kasdiene patirtimi. Tokių visai nekintančių dalykų tikrai esama, tik kitas reikalas, kad kartais ne taip paprasta juos surasti.

Toks nekintantis arba labai patikimas, nes iš pradinių uždavinio duomenų randamas, dalykas dažnai tampa uždavinio sprendimo pagrindu, paprastai pasiūlančiu jo sprendimo būdą ar metodą.

Štai žinomas uždavinys su grybais – iš tų truputį sunkėlesnių.

Šviežiuose grybuose yra 90 procentų vandens, o džiovintuose tik 12 procentų. Kiek gautume džiovintų grybų iš 22 kg šviežių grybų?

Įprastinis to uždavinio sprendimas būtų toks. Kadangi 22 kilogramuose šviežių grybų yra net $22 \cdot 0{,}9 = 19{,}8$ kg vandens, tai juose yra vos $22 - 19{,}8 = 2{,}2$ bevandenės grybienos, kuri visa išlieka džiovintuose grybuose – štai kas dabar yra mūsų invariantas – tik pagal svorį jau sudaro net 88 procentus džiovintų grybų masės (nors ką tik sudarė vos 10 procentų). Kadangi tie 2,2 kg bevandenės grybienos arba 2200 gramų jau sudaro 88 procentus džiovintų grybų svorio, tai vienas procentas džiovintų grybų sveria $2200 : 88 = 25$ g. Todėl visi džiovinti grybai svers 100 kartų daugiau, t.y. 2,5 kg.

Gal ir nelengva tą bevandenę grybieną pripažinti invariantu, nes ją „atskirai vieną pačią“ sunku parodyti – tam tektų visą vandenį iš grybų išgarinti, tačiau turime pripažinti, kad nė gramas jos neprapuolė ir ji visa pasiliko džiovintuose grybuose.

Dažnai invariantai būna žymiai pastebimesni, aiškiai geometriškai pavaizduojami ar parodomi.

Įsivaizduokime, „ratuku“ surašėme šešis skaičius 0,0,0,1,0 ir 1 (žinoma, nepamiršdami, kad pirmasis nulis ir paskutinis vienetas taip pat kaimynai). Leidžiama paimti bet kuriuos du gretimus skaičius ir prie abiejų pridėti po vienetą. Ar taip darydami kada nors galėtume pasigirti,kad visi skaičiai pasidarė lygūs?

Padėlioję pamatytume, kad nepavyksta, tačiau tai dar nieko nereiškia, gal tiesiog mes nesugebame tinkamai dėlioti arba, kitaip tariant, jeigu Jonavoje, keliose gatvėse klausinėdami praeivių jų pavardžių, neaptikome nė vieno Jonaičio, tai tikrai nereiškia, jog Jonaičių tame miestelyje nėra - gal mums stačiai pristigo kantrybės Jonavoje nueiti iki Joniškio gatvės, kur gal kas antras žmogus yra Jonaitis....

Būtų patogu pastebėti kokį nors dydį, kuris nekinta prie bet kurių dviejų gretimų skaičių pridedant po vienetą ir įgyja vienokią reikšmę pradinėje padėtyje, o kitokią reikšmę padėtyje, kurią siekiame gauti.

Atidžiau pasidairę pastebėtume, kad dviejų gretimų skaičių padidinimas vienetu nekeičia pirmojo, trečiojo ir penktojo skaičių bei antrojo, ketvirtojo ir šeštojo skaičių sumų skirtumo. Kitaip sakant, kiek tos sumos skyrėsi pradžioje, tiek jos visada skirsis.

Taigi tas invariantas (pirmojo, trečiojo ir penktojo skaičiaus bei antrojo, ketvirtojo ir šeštojo skaičių sumų skirtumas) pradžioje lygus 2, o siekiamoje gauti būsenoje būtų 0. Vadinasi, tai yra nepasiekiama būsena.

3. 2. DIRICHLĖ PRINCIPAS

Dirichle principu vadiname tai, kas kiekvienam blaiviau mąstančiam žmogui taip akivaizdu, kad tikrai surastume ne vieną, kuris sudvejotų, ar apskritai tokį aiškų dalyką verta išaukštinti pavadinant principu. Tai net labai suprantama, nes kiti principai regisi kažkiek sudėtingesni ar įmantriau formuluojami – jeigu pasitaiko aiškesnė pradžia, tai painesnė pabaiga ar atvirkščiai – o čia nuo pradžios iki pabaigos aišku kaip ant delno.

Taip ir įsiskverbia nusistebėjimas, kaip čia toks paprastas dalykas praverstų galynėjantis su painiais uždaviniais.

Tikrai, parodykite mums tokį, kuriam būtų neaišku, kad ant dviejų šakų 3 obuolius išvydę ant vienos kurios šakos bent dviejų obuolių nerastume. Ar regėjote tiek nesuprantantį, kuris ginčytų, jog tryliką žmonių į kompaniją suprašius, joje atsiras nors du tą patį mėnesį gimę

žmonės? Arba suraskite mums tokį, kuris nesuvoktų, kad perpildytoje Čepkelių kolegijos „Raisto uoga“ spanguolių technologijos grupėje, į kurią po neįtikėtino konkurso buvo priimti mokytis 38 moksleiviai, visada atsiras tokie du, kurie yra gimę vieną ir tą pačią mėnesio dieną.

Negi kam neaišku, kad vilkams 15 lapių į 7 olas suginus, vienoje iš tų olų rastume bent 3 laputaites.

Tačiau grįžkime į perpildytą Čepkelių kolegijos klasę, kurioje taip stropiai mokosi 38 mokiniai. Kaip visada ir visur, vieni labiau draugauja su savo bendraklasiais, kiti – mažiau. Žodžiu, kad ir kaip ten besiklotų, kiekvienas moksleivis turi kažkiek draugų savo klasėje. O jei visai neturi, tai sakysime, kad nors ir nulį draugų, bet vis tiek turi.

Prašoma įrodyti, kad visada atsiras du moksleiviai, turintys savo klasėje vienodai draugų.

Pirmiausia nelabai aišku, pro kurį plyšį į šio uždavinio sprendimą galėtų įlįsti jau truputį pašlovintas Dirichlė principas. Jeigu pavyzdžiu imtume draugingiausią pasaulio klasę, kurioje visi su visais draugauja - be abejonės, tokių klasių Dzūkijoje nereta – juk dzūkai labai draugiški – tai tada kiekvienas turėtų po 37 draugus. Taigi visi po lygiai, o ne tik 2. Kitas ekstremalus, o Dzūkijoje net ir teoriškai neįmanomas, bet vis dėlto nagrinėtinas atvejis būtų, kai niekas su niekuo nedraugauja, t.y. kiekvienas turi po nulį draugų. Taigi vėl visi po vienodai, o ne tik du.

Tačiau tai pačios kraštinės būsenos (kai daugiausiai, kai mažiausiai...).

Išnagrinėkime tarpinę padėtį arba pamėginkime įsivaizduoti, kad visi turi po ne tiek pat draugų. Jau suvokėme, kad daugiausiai arba 37 draugus gali turėti su visais draugaujantis, o mažiausiai, arba nulį draugų, turi visų vengiantis mokinys. Taip galimų draugų skaičius,kuris yra sveikas skaičius, svyruoja tarp 0 ir 37, duodamas 38 galimybes 38 moksleiviams. Kol kas jokio prieštaravimo nematyti. Ak, kad taip nors vieną galimybę eliminavus – tada tuoj pat turėtume 38 paukštelius ant 37 šakų arba ant kurios nors vienos bent 2 betupinčius.

Visai šviesu pagalvojus: jeigu visi turėtų nevienodą draugų skaičių, tai atsirastų ir žmogus, turintis 37 draugus, ir žmogus, turintis 0 draugų (suprask – jų neturintis). Tačiau, jeigu kuris nors turi 37 draugus (draugauja su visais), tai nebus bedraugio žmogaus, nes tas 37-asis draugas juk ir su juo draugauja. Todėl jau turim 38 paukštelius ant 37 šakelių ir nors ant vienos tupi bent du paukšteliai. Taigi kažkurie du moksleiviai turi po lygiai draugų savo klasėje.

Panašiai kalba būtų pasibaigusi pradėjus kalbėti apie su niekuo nedraugaujantį (0 draugų turintį) Kolegijos moksleivį.

Mes tiek daug kalbėjome apie Dirichle principo paprastumą ir net naudojomės juo, kad jau būtų pats laikas suformuluoti jį. Viena iš tokių formuluočių tokia:

Jeigu $(nk + 1)$ batą sudėtume į k dėžių, tai bent į vieną dėžę pakliūtų nemažiau kaip $(n + 1)$ batas.

Tikrai, jeigu to nebūtų, t.y., jeigu kiekvienoje dėžėje būtų daugiausiai n batų, tai jose visose terastume daugiausiai nk batų. O tai prieštarauja sąlygai, kad batų yra $(nk + 1)$.

Dirstelėkime į tokį galvosūkį.

Į visus šachmatų lentos langelius Artūras turi teisę įrašyti arba -1, arba 0,arba 1. Ar galėtų jam pasisekti taip, kad visos sumos skaičiuojant jas horizontaliai, vertikaliai, bei išilgai abiejų įstrižainių būtų skirtingos?

Aklai pabandžius vėl nieko neišeitų. Imkime kur kas mažesnę 4×4 matmenų lentą. Norėtume dar kartą priminti skaitytojui, kad konkretaus pamėginimo nauda yra neįkainuojama – jam mažai kas teprilygsta. Pačios giliausios ir abstrakčiausios teorijos yra pagrįstos labai konkrečiais mėginimais ir pastebėjimais.

Jeigu formuluotume klausimą filosofiškiau, t.y. klaustume, koks yra įmanomas tokių sumų „diapazonas" – likime su 4×4 matmenų lenta – tai suprastume beklausią, kokią didžiausią ir kokią mažiausią sumą, dėliodami keturis plius ar minus 1 lygius skaičius, galime gauti. Nereikia būti Saliamonu, kad suvoktume, jog daugiausiai galima gauti plius 4 (kai visi dėmenys yra po plius 1), o mažiausiai minus 4 (kai tie dėmenys yra po minus vienetą). Taigi, kad ir kaip bedėliotume, tos sumos yra „užsklęstos" tarp plius 4 ir minus 4. Tai reiškia, kad didžiausias skirtingų sumų skaičius yra 9. Skaičiuodami horizontaliai, vertikaliai ir išilgai abiejų įstrižainių, gautume 10 sumų. Taigi neišvengiamai bent dvi sumos kartosis ir visos skirtingos būti negalės.

Su 8×8 šachmatų lenta bus absoliuti analogija – iš 18 sumų, esančių tarp minus 8 ir plius 8, bent dvi vienodos.

Jeigu padrąsėję vietoj 4×4 ar 8×8 griebtumės $n \times n$ matmenų lentos, tai sunkumo sprendžiant nepadaugėtų, o jau būtume įveikę vieną Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiados uždavinį, turintį Nr.953, jeigu laikytumės A. Grincevičiaus ir J. Mačio uždavinyno (*Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiadų uždaviniai*, Kaunas, „Šviesa", 1990) numeracijos.

Labai rekomenduotume tą uždavinyną drąsesniam skaitytojui, beje, kaip ir ankstesnįjį, J. Kubiliaus sudarytąjį (*Olimpiadinis matematikos uždavinynas*, Kaunas, „Šviesa", 1972). Linkėtume skaitytojui sėkmės jų beieškant, nes jie jau seniai yra tapę bibliografinėmis retenybėmis.

Pabaigai siūlytume dar vieną nesunkų uždavinį.

Turime 2000 plokštumos tiesių. Reikia įrodyti, kad atsiras bent dvi tiesės, kurios turi po tiek pat (gal būt, po nulį) susikirtimo su kitomis tiesėmis taškų.

Skaitytojau, dar keletas paprastų dalykų.

1. Ar pastebėjote, kad kuo daugiau spiečiuje bičių, tuo sunkiau jį „ganyti". Tada galima pirmiau imtis mažesnio spiečiaus. Pavyzdžiui, puikiausiai iš pradžių vietoj 2000 tiesių tiktų ir kokios 4.

2. O kaip būtų, jeigu mes atsisakytume sąlygos, kad tos tiesės yra vienoje plokštumoje?

3. Gal čia yra kokia analogija tarp tų tiesių ir vienodo kurių nors dviejų Čepkelių kolegijos klasės draugų skaičiaus?

Ar jau radote atsakymus į šiuos iš pažiūros visai paprastus klausimus?

Jei dar ne, tai gal dar pasidairykite, nes ir Raštas, ir patirtis byloja, kad kas ieško, tas randa. Nekalbama tik ar iš karto, ar ne. Bet čia jau žmogiškojo atkaklumo arba paprasto užsispyrimo sritis.

3. 3. KUR BŪNA GEOMETRINĖS VIETOS?

Turint daiktą, pasižymintį kokia nors savybe, labai natūralu būtų paklausti, ar esama daugiau tą savybę turinčių daiktų? Turint du taškus A ir B natūralu yra pasiteirauti atstumo tarp jų, o, sužinojus jį, vėl klausti, ar dar yra kitų tokių taškų, kurių atstumas iki taško A būtų toks pats, kaip iki taško B? Sveikas protas diktuoja, kad tokių taškų yra daug – tikrai ne vienas. Tada natūralu paklausti, kiek gi tokių taškų esama, o suvokus, kad tokių taškų, kurie yra nutolę nuo taško A tiek pat, kaip taškas B, esama be galo daug, kyla dar vienas klausimas, kaip tokius taškus galėtume pavaizduoti? Taip natūraliai atsiranda apskritimo apibrėžimas, sakantis, kad apskritimas yra geometrinė vieta taškų, vienodai nutolusių nuo vieno pasirinktojo taško (mes pradėjome nuo taško A).

Čia ir toliau geometrine vieta vadinami visi viena kuria nors savybe pasižymintys taškai, kitaip sakant, taškai, priklausantys kuriai nors „visumai“. Tai vienas iš „geometrinės taškų vietos“ sinonimų.

Tokių klasifikuojančių savybių būna pačių įvairiausių. Mes pradėjome nuo vienos iš geriausiai girdėtų geometrinių vietų – nuo apskritimo. Jis tiek paplitęs, kad visi žinome ir kitus toje vietoje sakomus žodžius, pavyzdžiui, kad tas taškas *A*, atstumą iki kurio skaičiuojame, dažniau vadinamas apskritimo centru ir beveik visada žymimas raide *O*, o taško *B* atstumas iki taško *A*, – apskritimo spinduliu ir dažniausiai žymimas raide *R*.

Kitas girdėtas pavyzdys būtų toks. Atsitinka, kad vienas daiktas kokiu nors atžvilgiu yra „vienodai išsidėstęs“ kitų dviejų daiktų ar objektų atžvilgiu, kaip kad, sakysime, šiandiena yra vienodai toli ir nuo vakardienos, ir nuo rytdienos.

Geometrijos pasaulyje dienų vietą greitai užima taškai, tiesės, plokštumos, bet pati idėja išlieka.

Paklauskime kito panašaus dalyko. Jeigu turime tašką, vienodai nutolusį ne nuo vieno, bet jau nuo dviejų duotųjų taškų *A* ir *B*, tai ar dar esama kitų tokia savybe pasižyminčių taškų?

Visuose geometrijos vadovėliuose atsakymas į šį klausimą duodamas teiginiu, kuris sako, kad statmuo, iškeltas iš tuos taškus *A* ir *B* jungiančios atkarpos vidurio taško, ir yra visų tokių taškų, vienodai nutolusių nuo duotųjų taškų *A* ir *B*, geometrinė arba „gyvenamoji“ vieta. Niekur kitur, tik tame vidurio statmenyje daugiau tokių taškų nesama. Įrodymui pakaktų pasidaryti brėžinį ir vieną kartą pritaikyti Pitagoro teoremą.

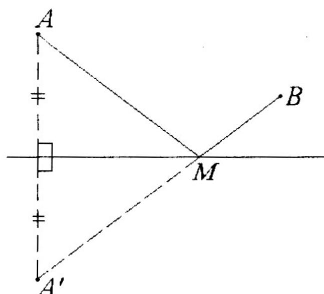
O kur yra geometrinė vieta taškų, kurie yra vienodai nutolę ne nuo dviejų, bet nuo trijų nurodytųjų taškų? Ar jų apskritai esama? Kiek jų yra? Įmanoma vaizduotis, kad tokių taškų skaičius gali priklausyti ir nuo tų trijų pradinių taškų dislokacijos ar konfigūracijos arba, lietuviškai kalbant, „išsidėstymo“.

Skaitytojas be vargo prisimins mokyklinę tiesą, kad apie „normalų“ trikampį visada galima apibrėžti apskritimą, o tai ir reiškia, kad geometrinė vieta taškų, vienodai nutolusių nuo trijų duotųjų taškų, ir yra per tuos taškus einančio apskritimo centras. Taigi, jokio didelio pasirinkimo nebeliko. Tai nelabai stebina, nes mes juk visą laiką „stiprinome“ reikalavimus. Juk net ir to vienintelio taško gali nebūti, sakykime, kai tie

trys taškai atsiduria vienoje tiesėje. Tuo retu atveju tikrai nėra jokio nuo trijų skirtingų tiesės taškų vienodai nutolusio taško.

Pakalbėsime apie kitą atvejį, kone vienodai įdomų ir fizikai, ir geometrijai.

Turime tiesę l ir du vienoje jos pusėje esančius taškus A ir B. Reikia nurodyti tokį tiesės l tašką M, kad atstumų MA ir MB suma būtų pati mažiausia (žr. 1 pav.).



1 pav.

Tradicinis sprendimas liepia vieną iš taškų, tarkime, A „atspindėti" tos tiesės atžvilgiu. Taip atsiranda taškas A', simetriškas taškui A tiesės l atžvilgiu. Tašką A' su tašku B jungianti atkarpa kirs tiesę l taške M. Tas taškas M ir būtų ieškomas taškas.

Kyla dar ir kitas klausimas. O kaip gi galima „susiprotėti", kad tašką A „verta" atspindėti tiesės l atžvilgiu? Kol to giliau neperprasime, tol tas uždavinys atrodys visai rimtas – autorius ne kartą yra sprendęs jį su studentais. Na, o perpratus, kas už to slypi, uždavinys nebekelia problemų guvesniam septintokui.

Tikrai, susivokus pagalvoti apie geometrines vietas, t.y. apie tai, ar esama ir kur esama tokių taškų A', kurių atstumas iki bet kurio tiesės l taško yra toks pats kaip ir taško A atstumas. Taip neišvengiamai „atsiremiame" į taško A veidrodinį atspindį A', t.y. susiduriame su taškui A simetrišku tašku A'. Visa kita daugiau negu paprasta.

Taigi jau pajutome, kaip svarbu, susidūrus su kokia nors įdomesne objekto savybe, drąsiai klausti, „o kas dar turi tokią pat savybę"?

3. 4. KRAŠTINIO ELEMENTO PRINCIPAS

Susirinkus didesniam žmonių sambūriui, ten esančius nesunku (kad ir sąlyginai) suskirstyti į krašte stovinčius ir viduje atsidūrusius. Viduje esantį „iš visų pusių" supa kiti sambūriečiai, o krašte esantis tuo pasigirti negalėtų. Kai kada tai gerai – gręsiant iš vidaus kokiam pavojui lengviau pasprukti. Blogiau būtų, jeigu kas grėstų iš išorės ir būtent iš tos pusės, kurioje jis stovi.

Tiesą sakant, „pakraštiečiai" yra išskirtiniai ne tiek tuo, kad jų esti mažiau negu kitų, kiek tuo, kad kokia nors savybe jie pasižymi „labiausiai". Pavyzdžiui, jeigu minia užpildo skritulį, tai kraštiečiai iš kitų stovinčiųjų išsiskiria tuo, kad niekas jiems negalėtų pasigirti stovįs toliau nuo centro, negu kad jie stovi.

Norėtume aiškiai pasakyti, kad kitos savybės atžvilgiu kraštiniais gali būti visai kiti tos pačios „minios" žmonės – kad ir rikiuojant tą patį sambūrį pagal ūgį.

Spręsdami uždavinius, su tokiais „pulkeliais" susiduriame dažnai ir tuomet sprendimą (pažintį su „pulkeliu") ir pradedame nuo pažinties su tuo pačiu išskirtiniausiu elementu arba su vienu iš jų, jeigu tokių atsirastų ne vienas. Taip galėtų atsitikti, jeigu panorėtume, pavyzdžiui, susitikti su pačiu aukščiausiu minios žmogumi.

Paprastai kalbant, tai kiek panašu į tai, kad atėjusi į kokią įstaigą kontrolė pirmiau dairosi viršininko ar bent sekretorės.

Tiek būtų paprastų pasamprotavimų, šiek tiek filosofija dvelkiančių, – kad nuo to tik aiškiau darytųsi.

Pereikime prie pavyzdžių.

Kiekviename šachmatų lentos langelyje įrašyta po skaičių. Leidžiama, pasirinkus bet kurią tos lentos eilutę ar stulpelį, visų tos eilutės ar stulpelio skaičių ženklus pakeisti priešingais. Reikia įrodyti, kad naudojant tokią skaičių ženklų keitimo schemą, visada galima pasiekti, kad visų eilučių ir visų stulpelių skaičių sumos būtų neneigiamos.

Uždavinys pabandymui popieriuje jau įdomus pradedant 3×3 matmenų lentele. Kompiuterį įjunkite nuo kokio 4×4 skaičių masyvo.

Aišku, kad šiuo atveju „minią" sudarys lentelės, gaunamos iš pradinės visais įmanomais būdais kaitaliojant jos eilučių ir stulpelių ženklus. O kokia bus ta rikiuojančioji savybė?

Pirmiausia paminėsime, kad bet kaip kaitaliojant atskirose eilutėse ir stulpeliuose esančių skaičių ženklus, gaunamas baigtinis skirtingų lentelių skaičius. Kitaip sakant, mūsų stebima "minia" nėra begalinė. (Drąsesnis skaitytojas galėtų paklausti, o kuo tai galėtų kliudyti? Tikrai, kodėl?)

Galimų lentelių skaičius yra baigtinis todėl, kad įrašius į pradinės lentelės langelį x, kad ir ką vėliau bedarytume, jame matytume tik x arba $-x$. Sakytume, langelis gali būti tik dviejose „būsenose“. Todėl skirtingų lentelių, gaunamų keičiant eilučių ir stulpelių ženklus, negali būti daugiau kaip 64 dvejetų sandauga. Tai skaičius su galybe dešimtainių ženklų, tačiau vis tiek baigtinis.

O dabar iš visų tokių lentelių „pasišauksime“ tą, kurios visų elementų suma yra pati didžiausia. Jeigu tokių atsirastų kelios, tiktų bet kuri.

Patikrinkime visų jos eilučių ir visų stulpelių skaičių sumas. Jeigu jos neneigiamos, reikalai baigti. O jeigu kuri nors eilutė ar stulpelis turi neigiamą sumą? Kas tada? Ogi tada, pakeitę visus tos eilutės ar stulpelio skaičius priešingais, turėsime lentelę su dar didesne visų skaičių suma. Bet mes „kvietėmės“ lentelę su pačia didžiausia suma, taigi didesnės negalima gauti. Tai negінčijamai rodo, jog imant lentelę su pačia didžiausia visų elementų suma, visų jos eilučių ir visų stulpelių skaičių sumos turi būti neneigiamos.

Smalsesniam skaitytojui siūlytume dar keletą gražių uždavinių. Tikimės, jog nepyksite, jeigu ne iš karto pavyktų visiškai susitvarkyti.

1. 2000 plokštumos taškų yra tokie, kad imant bet kurį trikampį su tuose taškuose esančiomis viršūnėmis, jo plotas neviršija 1. Įrodykite, jog tada visi tie taškai „sutelpa“ į trikampį, kurio plotas lygus 4.

2. Turime bet kokį iškiląjį briaunainį. Įrodykite, kad jame yra bent dvi sienos, turinčios po vienodą kraštinių skaičių.

3. Turime bet kokį iškiląjį daugiakampį. Iš laisvai pasirinktojo taško brėžiame statmenis į kraštines. Įrodykite, kad bent vienas statmuo kerta pačią kraštinę, o ne jos tęsinį.

3. 5. ŠIS TAS APIE INDUKCIJĄ

Nėra abejonės, kad tūlas skaitytojas, matematinių knygų pavartęs, yra ne kartą matęs prašymų ką nors įrodyti vadinamuoju matematinės

indukcijos metodu ir bus ne sykį susimąstęs net apie filosofines to dalyko potekstes.

Pokalbį apie tai, kas yra matematinė indukcija, geriau pradėti, kaip ir beveik bet kurią teorinę šneką, nuo konkrečių pavyzdžių. Visi esame kažką girdėję apie vadinamąją indukcijos bazę arba apie tai, kad reikia pažiūrėti, ar bus gerai, jeigu vietoje n, kuris yra kaip ir kintamasis, įrašytume 1 (rečiau 2 ar 3), o paskui jau būna perėjimas nuo didoko k prie dar truputį didesnio $(k + 1)$, besivadinančio pagrindiniu indukcijos žingsniu ar panašiai.

Kitaip sakant, tariame, kad su k yra viskas gerai ir stengiamės patirti, kad ir su $(k + 1)$ bus lygiai taip pat teisingai.

Pats aiškiausias pasakymas, kokį tik esu girdėjęs apie matematinės indukcijos principą, skambėjo taip:

Tarkime, jog turime begalinę moksleivių eilę. Jeigu toje eilėje pirmoji yra panelė ir už kiekvienos panelės vėl stovi panelė, tai eilėje stovi vien tik panelės.

Tikrai, jeigu eilėje būtų berniukų, tai galėtume surasti berniuką su „mažiausiu numeriu" – tą garantuoja ta nuostabi natūraliųjų skaičių aibės savybė, kad bet kuris jos poaibis turi patį mažiausiąjį elementą, arba pirmąjį elementą. Taigi tas berniukas su pačiu mažiausiu numeriu tikrai nėra pats pirmasis, nes pagal sąlygą pirmoji eilėje yra panelė, tai jo numeris didesnis, tikrai ne vienetas, o koks nors už vienetą didesnis n. Tačiau tada $(n - 1)$-oje eilės vietoje yra panelė, nes tas n-asis moksleivis yra pats kraštinis berniukas. Bet jeigu $(n - 1)$-oji yra panelė, tai pagal sąlygą po jos stovi irgi panelė. Taigi n-asis moksleivis yra panelė.

Gautasis prieštaravimas rodo, kad berniukams tokioje eilėje nėra vietos.

Dabar paimkime įprastinį, kad ir ne patį lengviausią pavyzdį, kurį 1953 metais antrajame rate sprendė Lietuvos jaunieji matematikai per savo Olimpiadą (žr. Nr. 69 iš A. Grincevičiaus ir J. Mačio anksčiau minėto uždavinyno).

Reikia įrodyti, kad $(7^{2n} - 48n - 1)/ 48^2$ yra sveikasis skaičius, jeigu n yra sveikasis skaičius.

Taigi prašoma įrodyti, kad kokį sveiką teigiamą skaičių vietoje n į tą reiškinį beįrašytume, gautasis skaičius be liekanos dalysis iš 48^2, arba 2304.

Įrašę vietoje n vienetą, problemų neturime, nes gauname 0. Vietoje n įrašę dvejetą, skaitiklyje gautume $7^4 - 48 \cdot 2 - 1 = 2401 - 96 - 1 = = 2304 = 48^2$ – tai, kas yra vardiklyje. Neturint skaičiuoklio vietoje n imti kitą skaičių jau nesinori, o mūsų prašo susitvarkyti su visais n.

Todėl esame priversti kažkaip išprotauti, jog, žinant, kad $(7^{2k} - 48k - 1)$ dalijasi iš 48^2 be liekanos, galima įsitikinti, kad ir $(7^{2(k+1)} - 48(k+1) - 1)$ dalijasi iš 48^2 be jokios liekanos.

Tuo įsitikinti pavyksta pamačius, kad

$$7^{2(k+1)} - 48(k+1) - 1 = 49(7^{2k} - 48k - 1) + 48^2 \cdot k$$

Dabar viskas yra suprantama: ir kur mes remiamės k-uoju indukcijos žingsniu (t.y. tuo, kad $7^{2k} - 48k - 1$ dalijasi iš 48^2) ir kokiu būdu iš to išgauname $(k+1)$-ojo žingsnio teisingumą. Taigi dabar aiškiai pakartokime visiems ir sau: kadangi

$(7^{2k} - 48k - 1)$ dalijasi iš 48^2, tai ir

$49(7^{2k} - 48k - 1)$, taigi ir visas reiškinys

$49(7^{2k} - 48k - 1) + 48^2 = 7^{2(k+1)} - 48\,(k+1) - 1$, dalijasi iš 48^2.

Tai liudija, jog jeigu kuris nors iš tokio „kirpimo“ skaičių dalijasi iš 48^2 be liekanos, tai ir sekantis iš to skaičiaus dalijasi be liekanos – savotiškas dalybos tramplinas.

Taip visa logiškai ir sugula, kad jeigu tik kuris nors dalijasi, tai dalijasi ir paskesni arba visi, nes mes patikrinome , kad viskas yra teisinga, kai n lygus vienetui.

Taigi, jeigu dalijasi pirmasis skaičius, tai dalijasi ir antrasis, ir trečiasis, ir dar, ir dar kiti, arba visi.

Indukcija savotiškai susišaukia ir su galėjimu užlipti begalinėmis kopėčiomis, jeigu tik įsivaizduotume, kad laiko tam nestinga arba su sugebėjimu (potencialiai) įveikti visus jų laiptelius. Tam užtenka tokių dviejų paprastų dalykų:

1. Tu sugebi užlipti ant pirmojo arba ant bet kurio kito „pradinio“ laiptelio.

2. Būdamas ant k-ojo laiptelio, esančio aukščiau to pradinio, sugebi pakilti ir ant sekančio, t.y. ant $(k + 1)$-ojo laiptelio.

Jeigu tu sugebi tuos du dalykus, tada tu sugebi viską, taigi gali pakilti tomis begalinėmis kopėčiomis.

Vėl imsimės akademiškesnių pavyzdžių.

Kadangi visi žinome, kad visų natūraliųjų skaičių nuo 1 iki n suma (aritmetinę progresiją suprantame ir mokame rasti jos n narių sumą) yra lygi

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

tai čia matematinės indukcijos netaikysime. Pabandysime trumpiau užrašyti visų natūraliųjų skaičių nuo 1 iki n kvadratų sumą $1^2 + 2^2 + 3^2 + {} + \ldots + n^2$.

Truputį pamaigius skaičiuoklį ima rodytis, jog

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Vėl pradėsime nuo vadinamosios indukcijos bazės, t.y. patikrinimo, ar kokiam nors pradiniam n tas teiginys yra teisingas.

Tegu $n = 1$. Tada ir vienoje, ir kitoje pusėje turime tą patį, nes

$$1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}.$$

Taigi ant pirmojo laiptelio gebame užlipti.

Sakykime, kad teiginys yra teisingas su kuriuo nors k, tai yra mes laiduojame, kad lygybė

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

yra teisinga ir labai norėtume, vietoje n įkurdinę $(k + 1)$, vėl gauti teisingą lygybę.

Natūralu prie abiejų hipotezinės lygybės pridėti po $(k + 1)^2$, tikintis kad tada ir kairioji pusė persirikiuos kaip tikimasi. Žiūrime, kas išeis:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{(k+1)(k(2k+1)+3(k+1))}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}.$$

Dar kartą atkreipiame dėmesį, jog galėjimas padaryti pirmąjį žingsnį kartu su gebėjimu, padarius k-ąjį žingsnį, galėti padaryti ir $(k + 1)$-ąjį žingsnį ir reiškia, jog mes viską galime, t.y. pajėgiame atlikti visus žingsnius.

Formaliai indukcijos principas neretai formuluojamas taip.

Tarkime, kad turime natūraliaisiais skaičiais n sunumeruotų teiginių seką $A(n)$, pasižyminčią tokiomis savybėmis:

a) $A(1)$ yra teisingas teiginys;

b) Jeigu teiginys $A(k)$ yra teisingas, tai ir teiginys $A(k+1)$ yra teisingas.

Tada visi teiginiai $A(n)$ yra teisingi.

Pastaba. Dažnai indukcijos galima „išvengti" sudedant kelias lygybes ar nelygybes, nelygu, ką įrodinėjame.

Pasižiūrėkime, kaip tai galima būtų atlikti sumuojant pirmųjų n natūraliųjų skaičių kvadratų sumą.

Parašome $(n + 1)$ jokių abejonių nekeliančių lygybių:

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1,$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1,$$
$$(n-1)^3 - (n-2)^3 = 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1,$$
$$(n-2)^3 - (n-3)^3 = 3(n-3)^2 + 3(n-3) + 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$2^3 - 1^3 = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1,$$
$$1^3 - 0^3 = 3\cdot 0^2 + 3\cdot 0 + 1.$$

Pastebime, kad visos eilutės taip susiję: jeigu kairėje lygybės pusėje turime narį su minusu, tai žemesnėje – lygiai tokį patį. Išimtį sudaro tik pirmas pirmosios ir paskutinis paskutiniosios lygybės narys. Jeigu dabar „brėžtume" brūkšnį, tai galėtume poeto Antano Baranausko žodžiais pasakyti, kad sudėjus kairėje pusėje „visa prapuolė", tik $(n+1)^3$ „beliko".

Toks išsiprastinimas dažnai vadinamas „teleskopiniu prastinimusi". Taip ir atsiranda terminai.

Turime

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \ldots n) + (n+1)$$

(pastarasis dėmuo $(n + 1)$ susidaro iš paskutiniųjų 1).

Žinodami, kad

$$1 + 2 + 3 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ir išreiškę pirmųjų n skaičių kvadratų sumą po visiškai paprastų algebrinių veiksmų gautume tą pačią kvadratų sumos išraišką $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, kurią anksčiau įrodėme „indukciškai“.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Įrodykite, kad iš 35 dviženklių skaičių (pirmas skaitmuo nelygus nuliui) visada galima surasti tris skaičius su vienoda skaitmenų suma.

2. Įrodykite tokį teiginį: jeigu turime 88 skirtingus sveikuosius skaičius, tai visada arba kuris nors iš jų dalijasi iš 88 arba keleto iš jų suma dalijasi iš 88.

3. Plokštumoje turime iškiląjį penkiakampį, kurio viršūnių koordinatės yra sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad šio penkiakampio viduje visada atsiras toks taškas, kurio koordinatės taip pat yra sveikieji skaičiai.

4. Ant kortelių surašėme sveikuosius skaičius nuo 1 iki 99. Po to korteles užvertėme, sumaišėme jas ir vėl surašėme sveikuosius skaičius nuo 1 iki 99. Ar gali abiejose kortelių pusėse parašytų skaičių skirtumų sandauga būti nelyginis skaičius?

5. Duota atkarpa AB. Raskite smailiųjų trikampių ABC viršūnių C geometrinę vietą (t.y. plokštumos dalį, kurioje turi būti taškas C, kad trikampis ABC būtų smailusis).

6. Plokštumoje duoti trys vienoje tiesėje nesantys taškai A, B ir C. Kiek plokštumoje yra tiesių, vienodai nutolusių nuo tų trijų taškų?

7. Ar galima žvaigždutes pakeisti pliusais ir minusais taip, kad gautume lygybę *1*2*3*4*...*1999=2000?

8. A, B, C ir D yra plokštumos taškai. Ar gali atsitikti taip, kad atstumai tarp poromis imamų taškų būtų: 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm ir 6 cm?

9. Įrodykite, kad skaičius $2^{6n} + 18n - 1$ dalijasi iš 81, kai n natūralusis skaičius.

10. Įrodykite, kad laisvai pasirinkus 46 skirtingus natūraliuosius skaičius, tarp jų atsiras tokie 2 skaičiai, kurių suma, arba skirtumas dalijasi iš 88.



IV. FUNKCIJA

A. Skūpas (Vilniaus gamtos, tiksliųjų ir technikos mokslų licėjus)

1. Sakykime, X ir Y yra dvi aibės. Dėsnis (taisyklė), pagal kurį kiekvienam aibės X elementui priskiriamas vienintelis Y aibės elementas, vadinamas funkcija.

Dažnai funkcija žymima

$$y = f(x), \quad x \in X \text{ arba } f\colon X \to Y.$$

Aibė X vadinama funkcijos f apibrėžimo sritimi (žymima $D(f)$), Y – reikšmių sritimi.

Dvi funkcijos, nors ir nusakomos tuo pačiu dėsniu, bet turinčios skirtingas apibrėžimo sritis, laikomos skirtingomis.

Mokykliniame matematikos kurse paprastai X ir Y yra realiųjų skaičių aibės, todėl ir funkcijos vadinamos skaitinėmis funkcijomis. Jos dažniausiai apibrėžiamos formulėmis (analiziškai). Jei apibrėžimo sritis $D(f)$ nėra atskirai nurodyta, funkcijos apibrėžimo sritimi laikoma reiškinio $f(x)$ apibrėžimo sritis.

2. Sakykime, kad funkcijos f apibrėžimo sritis simetriška nulio atžvilgiu, t. y., jei $x \in D(f)$, tai ir $-x \in D(f)$. Funkcija, šioje apibrėžimo srityje tenkinanti sąlygą

$$f(-x) = f(x),$$

vadinama lygine, o

$$f(-x) = -f(x),$$

– nelygine.

Pavyzdžiui, funkcija

$$f(x) = |x-1| + |x+1|$$

yra lyginė, nes ji apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje R ir

$$f(-x) = |-x-1| + |-x+1| = |x+1| + |x-1| = f(x).$$

Lengva matyti, kad funkcijos $f(x) = x^n$ yra lyginės, kai n lyginis, ir nelyginės, kai n nelyginis, o funkcija $g(x) = x^3 + x^2$ – nei lyginė, nei nelyginė.

Nesunku įsitikinti, kad kiekviena funkcija, turinti simetrišką apibrėžimo sritį, yra lyginės ir nelyginės funkcijų suma. Pakanka patikrinti, kad funkcija

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

yra lyginė, o

$$h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

nelyginė. Be to,

$$g(x)+h(x)=f(x).$$

3. Funkcija f vadinama periodine, jei yra toks skaičius $T\neq 0$, kad su kiekvienu x iš apibrėžimo srities skaičiai $x+T$ bei $x-T$ taip pat priklauso apibrėžimo sričiai ir joje galioja lygybė

$$f(x+T)=f(x).$$

Skaičius T vadinamas funkcijos f periodu.

Jei T yra funkcijos f periodas, tai $2T$, $3T$ ir t.t. bei $-T$, $-2T$, $-3T$ ir t.t. taip pat yra jos periodai (pabandykite tai įrodyti). Dažnai nustatinėjant funkcijos periodą ieškomas mažiausias teigiamas periodas, kuris vadinamas *pagrindiniu funkcijos periodu.*

Įrodysime, kad funkcija

$$f(x)=\cos^2 \pi x$$

yra periodinė, rasime jos periodą. Funkcija apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje R. Ieškome funkcijos periodo, t.y., skaičiaus $T\neq 0$, nepriklausančio nuo x, tokio, kad visoje aibėje $D(f)$ būtų teisinga lygybė

$$\cos^2 \pi(x+T)=\cos^2 \pi x.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$\frac{1+\cos 2\pi(x+T)}{2}=\frac{1+\cos 2\pi x}{2},$$

$$\cos 2\pi(x+T)-\cos 2\pi x=0,$$

$$\sin \pi T\cdot \sin \pi(2x+T)=0.$$

Iš lygties $\sin \pi T=0$ gauname

$$T=k\,,\quad k\in \mathrm{Z}.$$

Spręsdami lygtį

$$\sin \pi(2x+T)=0$$

T atžvilgiu, gautume tiktai T, priklausančius nuo x. Jie netenkina periodo

apibrėžimo. Taigi mažiausias teigiamas funkcijos $f(x) = \cos^2 \pi x$ periodas yra 1.

Sakykime, periodinė funkcija f su periodu T_f ir periodinė funkcija g, kurios periodas T_g, turi bendrą apibrėžimo sritį D. Periodai T_f ir T_g vadinami bendramačiais, jei galima rasti tokius tarpusavyje pirminius skaičius m ir n, kad galiotų lygybė

$$mT_f = nT_g.$$

Jeigu funkcijų f ir g periodai yra bendramačiai, tai šių funkcijų suma $f + g$ ir sandauga $f \cdot g$ yra periodinės funkcijos.

Nesunku įsitikinti, kad skaičius $T = mT_f = nT_g$ ir yra funkcijos $f + g$ ir $f \cdot g$ periodas. Iš tikrųjų

$$f(x+T) + g(x+T) = f(x + mT_f) + g(x + nT_g) = f(x) + g(x),$$

$$f(x+T) \cdot g(x+T) = f(x+mT_f) \cdot g(x+nT_g) = f(x) \cdot g(x).$$

Ne visos periodinės funkcijos turi mažiausią teigiamą periodą. Pavyzdžiui, Dirichlė funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeigu } x \text{ racionalus,} \\ 0, & \text{jeigu } x \text{ iracionalus} \end{cases}$$

yra periodinė, tačiau mažiausio teigiamo periodo neturi. Įsitikinkite, kad bet kuris racionalusis skaičius yra šios funkcijos periodas.

O kaip įsitikinti, kad funkcija f, apibrėžta srityje D, yra neperiodinė? Kiekviena periodinės funkcijos reikšmė kartojasi kas periodas, todėl kartais pakanka panagrinėti „patogias“ funkcijos reikšmes.

Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = \sin\sqrt{|x|}$ nėra periodinė. Ji lygi nuliui taškuose $x = \pm\pi^2 k^2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Atstumai tarp šių taškų

$$\pi^2(k+1)^2 - \pi^2 k^2 = \pi^2(2k+1),$$

didėjant k, pastoviai didėja.

4. Mokykliniame matematikos kurse paprastai sprendžiame lygtis, kurių sprendiniai yra skaičiai. Tačiau kartais tenka spręsti lygtis, kurių nežinomieji – funkcijos. Pavyzdžiui, suformuluokime tokį uždavinį: raskite funkcijas, tenkinančias lygtį

$$f(x) = f(-x).$$

Visos lyginės funkcijos yra šios lygties sprendiniai. Panašaus pobūdžio lygtys vadinamos funkcinėmis lygtimis.

Išspręsime funkcinę lygtį

$$xf(x)+2f(1-x)=x^2+6.$$

Sąlygoje jokie reikalavimai nežinomai funkcijai f nekeliami, todėl sprendinių ieškosime tarp funkcijų, apibrėžtų visoje realiųjų skaičių aibėje.

Lygtyje vietoj x įrašę $1-x$ (lygybė turi būti teisinga su visomis argumento x reikšmėmis!), turėsime

$$(1-x)f(1-x)+2f(x)=7-2x+x^2.$$

Gauname tiesinių lygčių sistemą ($f(x)$ ir $f(1-x)$ atžvilgiu):

$$\begin{cases} xf(x)+2f(1-x)=x^2+6, \\ 2f(x)+(1-x)f(1-x)=x^2-2x+7. \end{cases}$$

Ją išsprendę, gausime

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+2x+8}{x^2-x+4}=\frac{x(x^2-x+4)+2(x^2-x+4)}{x^2-x+4}.$$

Iš čia

$$f(x)=x+2.$$

5. Bendrai imant, funkcinių lygčių sprendimas nėra paprastas. Jos gali turėti „negražių“ sprendinių, panašių į minėtą Dirichlė funkciją. Kartais, nesprendžiant pačios lygties, galima nustatyti tam tikras jos sprendinių savybes.

Sakysime $a\neq 0$, $a\in \mathrm{R}$. Įrodysime, kad funkcija $f(x)$, apibrėžta lygtimi

$$f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)},$$

yra periodinė.

Kadangi

$$f(x+2a)=f((x+a)+a)=-\frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}=\frac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)},$$

tai, du kartus panaudoję šį sąryšį, gausime

$$f(x+4a)=f((x+2a)+2a)=-\frac{1}{f(x+2a)}=f(x).$$

Taigi nagrinėjamos funkcijos $f(x)$ periodas yra $4a$.

Norintiems daugiau sužinoti apie funkcines lygtis galima rekomenduoti paskaityti J.Mačio straipsnį „Susipažinkite: funkcinės lygtys“ matematikos žurnale „Alfa plius omega“, 1999 m. Nr. 1(7), 5–28 psl. bei G. Alkausko „Funkcinės lygtys matematikos olimpiadose“ matematikos žurnale „Alfa plius omega“, 1999 m. Nr. 1(7), 29–42 psl.

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Raskite funkcijos $f(x)=\sqrt{6-\left|x^2-10\right|}+\sqrt{3-x}$ apibrėžimo sritį.

2. Pažymėkime $f_n(x)=\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n \text{ kartų}}$. Raskite $f_n(x)$, kai

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3. Raskite $f(x)$, kai $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^2$.

4. Įrodykite, kad funkcija $f(x)=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ yra nelyginė.

5. Funkcija f apibrėžiama taip:

$$f(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{kai } x>0,\\ g(x), & \text{kai } x<0.\end{cases}$$

Raskite tokią funkciją g, kad f būtų nelyginė. Išspręskite lygtį

$$f(x)=\frac{1}{2}.$$

6. Duotos funkcijos $f(x)=\sin x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$. Ar funkcija $f(g(x))$ periodinė?

7. Duotos funkcijos

$$f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sin\frac{x}{n}},\quad n\in\mathrm{N}.$$

Kurios iš jų turi periodą 8π?

8. Įrodykite, kad funkcija

$$f(x)=\sin x+\sin\pi x$$

neperiodinė.

9. Išspręskite funkcinę lygtį

$$xf(x)+\frac{1}{2}(x+1)f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2+x+2.$$

10. Įrodykite, kad kiekviena funkcija, tenkinanti funkcinę lygtį

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2},\quad a\neq 0,$$

apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje R, yra periodinė.



V. SVEIKOJI IR TRUPMENINĖ SKAIČIAUS DALIS. JŲ SAVYBĖS. FUNKCIJŲ $[f(x)]$, $f([x])$, $\{f(x)\}$, $f(\{x\})$ SAVYBĖS IR GRAFIKAI

V. Pekarskas (Kauno technologijos universitetas)

Išnagrinėsime dvi svarbias skaičių teorijos funkcijas.

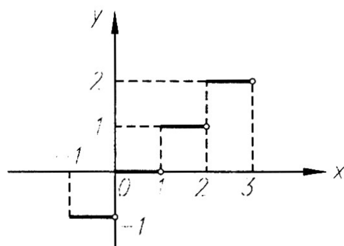
Pirmoji jų vadinama sveikąja realiojo skaičiaus x dalimi ir žymima $[x]$ arba $E(x)$.

1 apibrėžimas. Sveikąja skaičiaus x dalimi $[x]$ vadinamas didžiausias sveikas skaičius, ne didesnis už x.

Pavyzdžiui, $[3]=3$, $[4{,}5]=4$, $[0{,}13]=0$, $[-7{,}28]=-8$. Kai x – sveikasis skaičius, tai $[x]=x$. Todėl su visais realiaisiais x teisinga nelygybė

$$[x]\leq x<[x]+1\,.$$

Nubraižykime funkcijos $[x]$ grafiką. Kai $-1\leq x<0$, tai $[x]=-1$; kai $0\leq x<1$, tai $[x]=0$; kai $1\leq x<2$, tai $[x]=1$; kai $2\leq x<3$, tai $[x]=2$ ir t.t. Funkcijos $[x]$ grafiką gausime, nubrėžę tiesių $y=-1$, $y=0$, $y=1$, $y=2$ ir t.t. atkarpas atitinkamuose x kitimo intervaluose. Funkcijos $[x]$ grafikas, kai $-1\leq x<3$ pavaizduotas 1 pav.



1 pav.

Funkcija $[x]$ yra dalimis tolydi funkcija, kuri sveikuose taškuose x daro šuolį.

Įrodysime kelias sveikosios skaičiaus dalies savybes.

1 teorema. Su bet kuriais natūraliaisiais skaičiais m ir n teisingos nelygybės:

a) $\left[\frac{n}{m}\right]\cdot m \leq n$;

b) $\left(\left[\frac{n}{m}\right]+1\right)\cdot m > n$.

Įrodymas. Tarkime, kad, padaliję $\frac{n}{m}$, gauname dalmenį r ir liekaną s. Tuomet $n = mr + s$; čia $0 \leq s < m$. Vadinasi,

$$\frac{n}{m} = r + \frac{s}{m}.$$

Kadangi $0 \leq \frac{s}{m} < 1$, tai $\left[\frac{n}{m}\right] = r$. Iš sąlygos $n = mr + s$ išplaukia dvi savaime aiškios nelygybės

$$n \geq mr = m\left[\frac{n}{m}\right]$$

ir

$$n < mr + m = m(r+1) = m\left(\left[\frac{n}{m}\right]+1\right),$$

kurias reikėjo įrodyti.

2 teorema. Sandaugoje $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n$ yra $\left[\frac{n}{m}\right]$ dauginamųjų, kurie dalijasi iš m.

Įrodymas. Kai $m > n$, tai $\left[\frac{n}{m}\right]$=0, kai $m = n$, tai $\left[\frac{n}{m}\right]$=1. Taigi teorema yra teisinga šiais abiem atvejais.

Sakykime, kad $m < n$. Tuomet iš m dalijasi tik tie sandaugos $n!$ dauginamieji, kuriuos galima išreikšti taip: $1\cdot m, 2\cdot m, 3\cdot m, \ldots, \left[\frac{n}{m}\right]\cdot m$.

Kadangi $\left[\frac{n}{m}\right]\cdot m \leq n$, tai jie visi tikrai yra sandaugos $n!$ dauginamieji. Daugiau dalių iš m dauginamųjų sandauga $n!$ neturi, nes skaičius

$\left[\dfrac{n}{m}+1\right]\cdot m > n$. Dauginamųjų $1\cdot m, 2\cdot m, 3\cdot m, \ldots, \left[\dfrac{n}{m}\right]\cdot m$ skaičius ir lygus $\left[\dfrac{n}{m}\right]$. Teorema įrodyta.

3 teorema. Sandauga $n!$ dalijasi iš pirminio skaičiaus p, pakelto laipsniu, lygiu sumai

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^m}\right];$$

čia $p^m \le n$, $p^{m+1} > n$.

Įrodymas. Sandauga $n!$ turi $\left[\dfrac{n}{p}\right]$ dauginamųjų, kurie dalijasi iš p; analogiškai $\left[\dfrac{n}{p^2}\right]$ iš jų dalijasi iš p^2; iš pastarųjų $\left[\dfrac{n}{p^3}\right]$ dalijasi iš p^3 ir t.t. Šių skaičių suma ir yra tas laipsnio rodiklis, kuriuo pakeltas skaičius p yra skaičiaus $n!$ daliklis. Teorema įrodyta.

Įrodytos savybės taikomos, sprendžiant dalumo uždavinius.

1 pavyzdys. Raskime didžiausią skaičiaus 7 laipsnį, iš kurio dalijasi skaičius 400!

Sprendimas. Šio laipsnio rodiklis lygus

$$\left[\frac{400}{7}\right]+\left[\frac{400}{7^2}\right]+\left[\frac{400}{7^3}\right]=57+8+1=66.$$

Panaudodami funkciją $[x]$, apibrėšime antrąją funkciją $\{x\}$, kuri vadinama trupmenine skaičiaus dalimi.

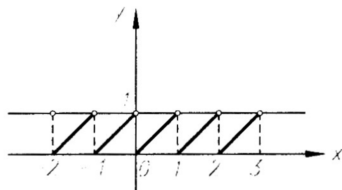
2 apibrėžimas. Trupmenine skaičiaus x dalimi $\{x\}$ vadinama funkcija

$$\{x\}=x-[x].$$

Pavyzdžiui, $\{3\}=0$, $\{4{,}5\}=4{,}5-4=0{,}5$, $\{0{,}13\}=0{,}13-0=0{,}13$, $\{-7{,}28\}=-7{,}28-(-8)=0{,}72$.

Nubraižykime funkcijos $\{x\}$ grafiką. Kai $-1\le x<0$, tai $\{x\}=x+1$; kai $0\le x<1$, tai $\{x\}=x-0=x$; kai $1\le x<2$, tai $\{x\}=x-1$; kai

$2 \leq x < 1$, tai $\{x\} = x - 2$ ir t.t. Funkcijos $\{x\}$ grafikas intervale $[-2; 3)$ pavaizduotas 2 pav. Jis gaunamas, nubraižius tiesių $y = x + 2$, $y = x + 1$, $y = x$, $y = x - 1$, $y = x - 2$ ir t.t. dalis atitinkamuose x kitimo intervaluose.



2 pav.

Funkcija $\{x\}$ yra neneigiama, dalimis tolydi, be to, periodinė. Jos periodas $T = 1$.

2 pavyzdys. Ištirkime, ar funkcija

$$f(x) = \{x\} + \sin x$$

yra periodinė, ar neperiodinė.

Sprendimas. Tarkime, kad $f(x)$ yra periodinė funkcija ir jos periodas T. Tuomet turėtų galioti lygybė

$$\{x + T\} + \sin(x + T) = \{x\} + \sin x. \qquad (1)$$

Iš jos, kai $x = 0$, gauname lygybę

$$\{T\} + \sin T = 0,$$

o kai $x = -T$, lygybę

$$\{-T\} - \sin T = 0.$$

Sudėję šias dvi lygybes, turime

$$\{T\} + \{-T\} = 0.$$

Kadangi trupmeninė skaičiaus dalis visada yra neneigiama, tai pastaroji lygybė teisinga tik tada, kai $\{T\} = \{-T\} = 0$, vadinasi, kai T – sveikasis skaičius. Tuomet iš lygybės $\{T\} + \sin T = 0$ išplaukia, kad $\sin T = 0$ ir $T = k\pi$, $k \in Z$. Tarp skaičių $k\pi$ sveikasis yra tik skaičius 0. Taigi (1) lygybė teisinga tik tada, kai $T = 0$. O tai reiškia, kad funkcija $f(x)$ yra neperiodinė.

3 pavyzdys. Įrodykime, kad

$$\sin 3 = \sin\{\pi\}.$$

Sprendimas.

$$\sin 3 = \sin[\pi] = \sin(\pi - \{\pi\}) = \sin\{\pi\}.$$

4 pavyzdys. Patikrinkime, ar teisinga nelygybė

$$\sin 1 > 1 - \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Sprendimas. Turime

$$\sin 1 = \sin\left[\frac{\pi}{2}\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right) = \cos\left\{\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Kadangi

$$\cos x > 1 - \frac{1}{2}x,$$

kai $0 < x < 1$, tai, panaudoję šią nelygybę (kad ji yra teisinga, galėtumėt įsitikinti, nubraižę funkcijų $y = \cos x$ ir $y = 1 - \frac{1}{2}x$ grafikus atkarpoje $[0; 1]$), gauname teisingą nelygybę

$$\cos\left\{\frac{\pi}{2}\right\} > 1 - \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2}\right\}.$$

5 pavyzdys. Raskime mažiausią natūralųjį skaičių m, su kuriuo

$$0{,}3 < \{\sqrt{m}\} < \frac{1}{3}.$$

Sprendimas. Pažymėkime $\sqrt{m} = k + \alpha$; čia $k \in Z, 0 \le \alpha < 1$. Tuomet iš sąlygos turime

$$0{,}3 < \alpha < \frac{1}{3};$$

iš čia

$$k + \frac{3}{10} < \sqrt{m} < k + \frac{1}{3},$$

$$k^2 + \frac{3}{5}k + \frac{9}{100} < m < k^2 + \frac{2}{3}k + \frac{1}{9}.$$

Kai $k = 1$ ir $k = 2$, gauname atitinkamai $1{,}69 < m < 1{,}77\ldots$ ir $5{,}29 < m < 5{,}44\ldots$. Šių nelygybių netenkina nė vienas natūralusis

skaičius. Kai $k=3$, gauname nelygybę $10{,}89 < m < 11{,}11\ldots$, kuriai tinka natūralusis skaičius $m=11$.

Atsakymas. $m=11$.

6 pavyzdys. Įrodykime, kad sveikoji skaičiaus

$$A=\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2, \quad n\in N$$

dalis yra nelyginis skaičius.

Sprendimas. Pakėlę kvadratu, gauname

$$A=2n+1+2\sqrt{n(n+1)}=2n+1+2\sqrt{n^2+n}>2n+1+2\sqrt{n^2}=4n+1.$$

Kita vertus,

$$A=2n+1+\sqrt{4n^2+4n}<2n+1+\sqrt{4n^2+4n+1}=4n+2.$$

Vadinasi, $[A]=4n+1$.

7 pavyzdys. Raskime sveikąją skaičiaus

$$A=\sqrt[3]{m^3-m+\sqrt[3]{m^3-m+\ldots+\sqrt[3]{m^3-m}}}+$$
$$+\sqrt{n^2-n+\sqrt{n^2-n+\ldots+\sqrt{n^2-n}}}$$

dalį, kai m ir n – natūralieji skaičiai, didesni už 1.

Sprendimas. Aišku, kad

$$A<\sqrt[3]{m^3-m+\sqrt[3]{m^3-m+\ldots+\sqrt[3]{m^3-m+m}}}+$$
$$+\sqrt{n^2-n+\sqrt{n^2-n+\ldots+\sqrt{n^2-n+n}}}=m+n.$$

Pirmasis dėmuo yra didesnis už dydį $\sqrt[3]{m^3-m}$, kuris tenkina nelygybę

$$\sqrt[3]{m^3-m}>m-\frac{1}{3} \qquad (2)$$

Antrasis dėmuo yra didesnis už dydį $\sqrt{n^2-n}$, kuris tenkina nelygybę

$$\sqrt{n^2 - n} > n - \frac{2}{3}. \qquad (3)$$

Įsitikinkite patys, kad (2) ir (3) nelygybės yra teisingos.

Vadinasi,

$$A > m - \frac{1}{3} + n - \frac{2}{3} = m + n - 1.$$

Taigi

$$m + n - 1 < A < m + n,$$

todėl turime $[A] = m + n - 1$.

Išspręskime dar vieną sudėtingesnį pavyzdį. Spręsdami jį, susipažinsime su dviem įdomiomis nelygybėmis, kurios dažnai būna naudingos, sprendžiant uždavinius. Tai Bernulio nelygybė

$$(1 + x)^{\alpha} > 1 + \alpha x,$$

kuri teisinga, kai $x > -1$, $\alpha > 1$ ir nelygybė

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e;$$

čia e – matematinė konstanta, $e \approx 2{,}71828\ldots$.

8 pavyzdys. Raskime sveikąją skaičiaus

$$A = \frac{1999}{1990}^{\frac{1}{\frac{1}{1900} + \frac{1}{1901} + \ldots + \frac{1}{1998}}}$$

dalį.

Sprendimas. Pažymėkime laipsnio rodiklio vardiklį raide p. Aišku, kad $\frac{99}{1998} < p < \frac{99}{1900}$. Todėl $\frac{1998}{99} > \frac{1}{p} > \frac{1900}{99}$. Toliau pritaikome Bernulio nelygybę, įrašydami į ją $x = \frac{99}{1900}$, $\alpha = \frac{1}{p}$.

Vadinasi,

$$A = \left(1 + \frac{99}{1900}\right)^{1/p} > 1 + \frac{99}{1900} \cdot \frac{1}{p} > 2.$$

Kita vertus,

$$A=\left(1+\frac{99}{1900}\right)^{1/p}<\left(1+\frac{99}{1900}\right)^{1998/99}=$$

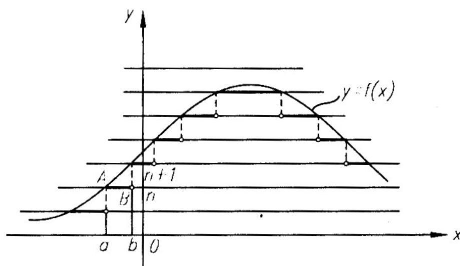
$$=\left(1+\frac{99}{1900}\right)^{98/99}\left(1+\frac{99}{1900}\right)^{1900/99}<$$

$$<\left(1+\frac{99}{990}\right)^{1}\cdot e=1{,}1e<3.$$

Čia panaudojome formulę $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e$, kai $n=\frac{1900}{99}$. Taigi galutinai, $[A]=2$.

FUNKCIJOS $[f(x)]$ GRAFIKAS

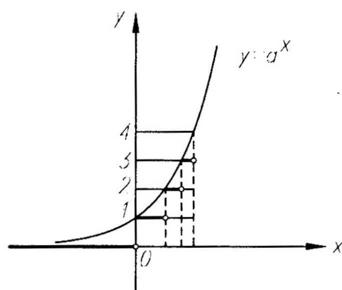
Tarkime, kad funkcijos $y=f(x)$ grafikas nubraižytas (*žr.* 3 pav.).



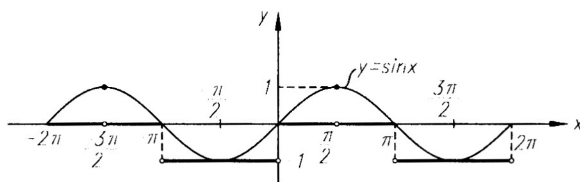
3 pav.

Nubrėžkime tieses $y=n$ $(n\in Z)$ ir išnagrinėkime vieną iš juostų, apribotų tiesėmis $y=n$ ir $y=n+1$. Tame x kitimo intervale, kuriame funkcijos grafiko ordinatės y yra tarp n ir $n+1$, turėsime $y=[f(x)]=n$. Vadinasi, $y=n$, kai $a\leq x<b$. Taigi funkcijos $[f(x)]$ grafikas intervale $[a;\ b)$ bus atkarpa AB. Panašiai išnagrinėjame ir kitas juostas, tarp kurių yra funkcijos $f(x)$ grafikas.

4 pav. pateiktas funkcijos $y = [a^x](a > 1)$ grafikas, o 5 pav. – funkcijos $y = [\sin x]$ grafikas.



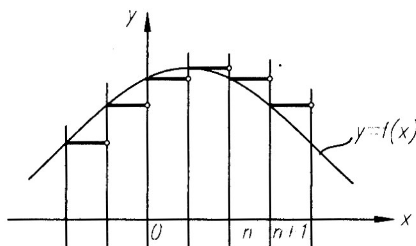
4 pav.



5 pav.

FUNKCIJOS $f([x])$ GRAFIKAS

Tarkime, kad funkcijos $y = f(x)$ grafikas nubraižytas (*žr.* 6 pav.).

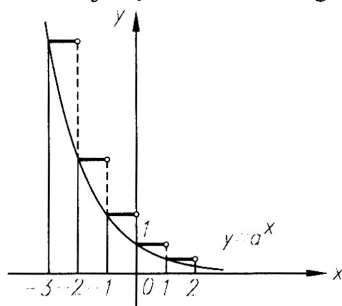


6 pav.

Nubrėžkime tieses $x = n\ (n \in Z)$ ir išnagrinėkime juostą, kurią riboja tiesės $x = n$ ir $x = n + 1$.

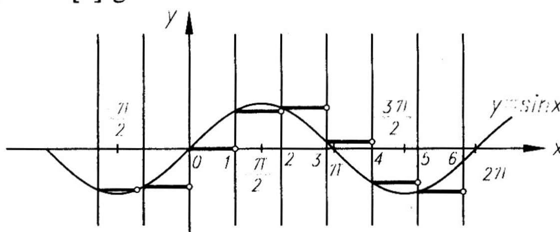
Intervale $[n; n+1)$ turime $[x] = n$ ir $f([x]) = f(n)$. Vadinasi, kai x kinta tarp n ir $n + 1$, tai funkcija $f([x])$ šiame intervale yra pastovi ir lygi $f(n)$. Panašiai nagrinėjame ir kitas juostas, tarp kurių yra funkcijos $f(x)$ grafikas.

7 pav. pavaizduotas funkcijos $y = a^{[x]}$, $0 < a < 1$ grafikas, 8 pav. –



7 pav.

funkcijos $y = \sin[x]$ grafikas.

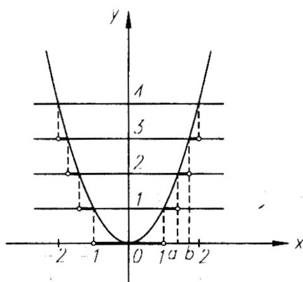


8 pav.

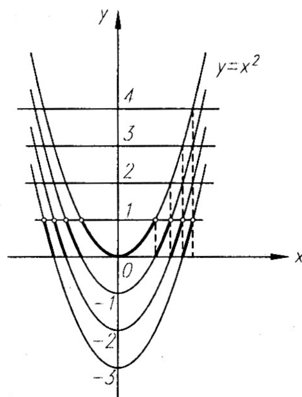
FUNKCIJOS $\{f(x)\}$ GRAFIKAS

Kadangi $\{f(x)\} = f(x) - [f(x)]$, tai funkcijos $\{f(x)\}$ grafiką gausime atimdami funkcijų $f(x)$ ir $[f(x)]$ grafikus. Nubraižykime, pavyzdžiui, funkcijos $\{x^2\}$ grafiką. Pirmiausia nubraižome funkcijų x^2 bei $[x^2]$ grafikus (9 pav.). Jų skirtumas intervale $[0; 1)$ lygus $x^2 - 0 = x^2$;

intervale $[1; a)$ jis lygus $x^2 - 1$; intervale $[a; b)$ jis lygus $x^2 - 2$ ir t.t. Vadinasi, nubraižę funkcijų $y = x^2$, $y = x^2 - 1$, $y = x^2 - 2$ ir t.t. grafikus ir paėmę jų dalis atitinkamuose intervaluose, gausime funkcijos $\{x^2\}$ grafiką (*žr.* 10 pav.).



9 pav.



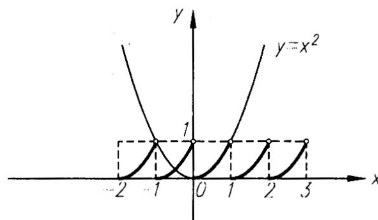
10 pav.

FUNKCIJOS $f(\{x\})$ GRAFIKAS

Funkcija $f(\{x\})$ yra periodinė, jos periodas $T = 1$. Kadangi intervale $[0; 1)$ $\{x\} = x$, tai šiame intervale

$$f(\{x\}) = f(x).$$

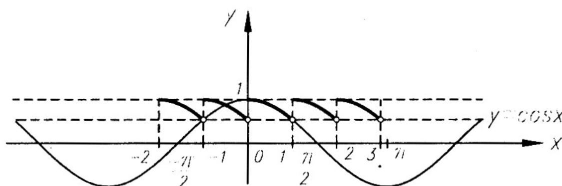
Todėl $f(\{x\})$ grafikas gaunamas iš $f(x)$ grafiko dalies, atitinkančios intervalą $[0; 1)$, periodiškai jį pratęsiant į intervalus $[1; 2)$, $[2; 3)$ ir t.t.



11 pav.

11 pav. pavaizduotas funkcijos $y = \{x\}^2$ grafikas,

12 pav. – funkcijos $y = \cos\{x\}$ grafikas.



12 pav.

LYGČIŲ IR NELYGYBIŲ SPRENDIMAS

Lygčių ir nelygybių sprendimo būdus pademonstruosime, išspręsdami keletą pavyzdžių. Paminėsime, kad tokių lygčių ir nelygybių bendrų sprendimo metodų nėra. Nagrinėjant funkcijas $[x]$ ir $\{x\}$, kartais tikslinga tarti, kad x yra tarp dviejų gretimų natūraliųjų skaičių n ir $n+1$, tuomet $[x]=n$. Kartais tikslinga pažymėti $x=k+\alpha$, čia $k\in Z$, $0\le\alpha<1$. Tuomet $[x]=k$, $\{x\}=\alpha$.

1 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\operatorname{tg}[x]\cdot\operatorname{tg}\{x\}=1.$$

Sprendimas. Kadangi

$$\operatorname{tg}[x]=\frac{\sin[x]}{\cos[x]},\quad \operatorname{tg}\{x\}=\frac{\sin\{x\}}{\cos\{x\}},$$

tai duotąją lygtį pakeičiame lygtimi

$$\sin[x]\sin\{x\}=\cos[x]\cos\{x\},$$

$$\cos([x]+\{x\})=0,$$

$$\cos x=0;$$

iš čia $x=\frac{\pi}{2}+n\pi,\quad n\in Z$.

2 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

$$[x]\{x\}>1.$$

Sprendimas. Kadangi $\{x\} \geq 0$, tai turi būti $[x] > 0$, todėl $x > 1$. Kita vertus, x negali būti sveikasis skaičius, nes tuomet $\{x\} = 0$. Vadinasi, nelygybė turi prasmę, kai $x > 1$ ir $x \notin N$. Kai $1 < x < 2$, tai $[x] = 1$, $0 < \{x\} < 1$ ir nelygybė vėl bus neteisinga. Todėl nagrinėkime tą atvejį, kai $x > 2$ ir $x \notin N$. Iš sąlygos $\{x\} = x - [x]$ turime

$$[x](x - [x]) > 1.$$

Tarkime, kad $n < x < n + 1$; čia $n = 2, 3, 4, \ldots$. Tuomet $[x] = n$ ir duotąją nelygybę pertvarkome į nelygybę

$$n(x - n) > 1;$$

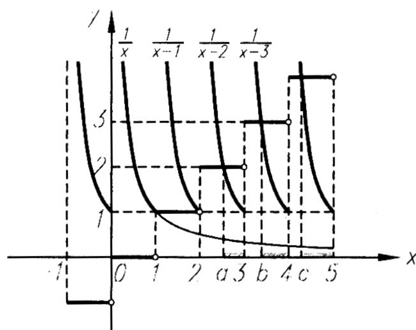
iš čia $x > n + \frac{1}{n}$.

Vadinasi, nelygybės sprendiniai nusakomi sąlygomis

$$n + \frac{1}{n} < x < n + 1, \quad n \in N, \quad n \geq 2.$$

Šią nelygybę galima išspręsti ir grafiškai. Kadangi $\{x\} \neq 0$, tai duotoji nelygybė ekvivalenti nelygybei

$$[x] > \frac{1}{\{x\}}.$$



13 pav.

Toliau nubraižome funkcijų $[x]$ ir $\frac{1}{\{x\}}$ grafikus (13 pav.) ir nustatome tuos intervalus, kuriuose funkcijos $[x]$ grafikas yra virš funkcijos $\frac{1}{\{x\}}$

grafiko. Tai bus intervalai (a; 3), (b; 4), (c; 5) ir t.t. Tašką a gausime, išsprendę lygtį $\frac{1}{x-2}=2$, tašką b – lygtį $\frac{1}{x-3}=3$ ir t.t. Bendru atveju reikia išspręsti lygtį $\frac{1}{x-n}=n$, kuri turi sprendinį $n+\frac{1}{n}$. Vadinasi, duotosios nelygybės sprendiniai yra intervalai $\left(n+\frac{1}{n}; n+1\right)$, $n\in N$, $n\geq 2$.

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\left[\frac{x-1}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]\right]=\lg x.$$

Sprendimas. Turime:

$$\left[\frac{x-1}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]\right]=\left[\left\{\frac{x}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right]=\begin{cases}0, & \text{kai } \frac{1}{2}\leq\left\{\frac{x}{2}\right\},\\ -1, & \text{kai } 0\leq\left\{\frac{x}{2}\right\}<\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Taigi $\lg x=0$ arba $\lg x=-1$. Tuomet $x=1$ arba $x=\frac{1}{10}$. Abu skaičiai yra duotosios lygties sprendiniai.

4 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\frac{1}{[x]}+\frac{1}{\{x\}}=\frac{1}{|x|}.$$

Sprendimas. Lygtis turi prasmę, kai $x\notin(0;1)$ ir $x\notin Z$, nes iš sąlygos $x\in(0;1)$ gauname $[x]=0$, o iš sąlygos $x\in Z$ – $\{x\}=0$.

Išnagrinėkime du atvejus.

1. Kai $x>1$, tai $|x|=x$ ir lygtis tampa tokia

$$\frac{1}{[x]}+\frac{1}{x-[x]}=\frac{1}{x}.$$

Iš jos gauname

$$x^2+[x]^2=x[x],$$

$$(x-[x])^2=-x[x].$$

Kai $x > 1$, tai $-x[x] < 0$, o $(x-[x])^2 > 0$. Lygtis sprendinių neturi.

2. Kai $x < 0$, tai $|x| = -x$ ir iš duotosios lygties gauname

$$[x]^2 - x^2 = x[x].$$

Tarkime, kad $-(n+1) < x < -n$; čia $n \in N$. Tuomet $[x] = -(n+1)$ ir duotoji lygtis tampa lygtimi

$$(n+1)^2 - x^2 = -x(n+1).$$

Šios kvadratinės lygties sprendiniai yra $x_{1,2} = \dfrac{n+1 \pm (n+1)\sqrt{5}}{2}$.

Kadangi $x < 0$, tai $x = \dfrac{n+1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$, $n = 0,1,2,\ldots$.

5 pavyzdys. Raskime $\{x\}$, kai

$$\left[x + \frac{3}{8}\right] + [x] = [2x].$$

Sprendimas. Pažymėkime $x = k + \alpha$; čia $k \in Z$, $0 \le \alpha < 1$. Tuomet turime

$$\left[\alpha + \frac{3}{8}\right] = [2\alpha].$$

Sakykime, $\alpha < \frac{5}{8}$; tuomet gauname lygtį $[2\alpha] = 0$, kuri teisinga, kai $\alpha < \frac{1}{2}$. Tarkime, kad $\alpha \ge \frac{5}{8}$, tuomet gauname lygtį $[2\alpha] = 1$, kuri teisinga, kai $\alpha > \frac{1}{2}$. Vadinasi, turint galvoje sąlygą $\alpha \ge \frac{5}{8}$, ji teisinga, kai $\alpha \ge \frac{5}{8}$.

Atsakymas. $\{x\} = \alpha \in \left[0; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{8}; 1\right)$.

6 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] + [x]^2 = [2x] + 2.$$

Sprendimas. Pirmiausia įrodysime, kad su bet kuriuo $x \in R$ teisinga lygybė $[2x]=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]$. Pažymėkime $x=k+\alpha$; čia $k \in Z$, $0 \le \alpha < 1$. Tuomet

$$[2x]=[2k+2\alpha]=2k+[2\alpha], \quad [x]=k,$$

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=k+\left[\alpha+\frac{1}{2}\right].$$

Belieka įrodyti, kad

$$[2\alpha]=\left[\alpha+\frac{1}{2}\right].$$

Tai nesunku patikrinti tiesiogiai. Iš tiesų, kai $0 \le \alpha < \frac{1}{2}$, tai $[2\alpha]=0$ ir $\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]=0$. Kai $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$, tai $[2\alpha]=1$ ir $\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]=1$.

Panaudodami įrodytą tapatybę, duotąją lygtį pakeičiame lygtimi

$$[x]^2-[x]-2=0;$$

iš čia $[x]=2$ arba $[x]=-1$. Taigi duotosios lygties sprendiniai yra aibių sąjungos $[-1;0)\cup[2;3)$ elementai.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Keliais nuliais baigiasi skaičius 600!?

2. Ištirkite, ar periodinės yra funkcijos:

a) $f(x)=\{x\}+\cos 2x$;

b) $f(x)=\{x\}+\sin \pi x$.

3. Nubraižykite šių funkcijų grafikus:

a) $y = \left[\dfrac{1}{x}\right]$; **b)** $y = [\arccos x]$;

c) $y = \dfrac{1}{[x]}$; **d)** $y = \operatorname{tg}[x]$;

e) $y = \{2^x\}$; **f)** $y = \{\lg x\}$;

g) $y = 2^{\{x\}}$; **h)** $y = \sqrt{\{x\}}$.

4. Išspręskite nelygybę $[x] + \lg\{x\} > 2$.

5. Raskite sveikąją skaičiaus

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6}}}}$$

dalį.

6. Kiek sprendinių turi lygtis $\left[x + \dfrac{3}{8}\right] + [x] = \dfrac{7x-2}{3}$?

7. Išspręskite lygtį $[x] + \dfrac{1}{[x]} = \{x\} + \dfrac{1}{\{x\}}$.

8. Išspręskite lygtį $\big||x| - [x]\big| = \big[|x| - [x]\big]$.

9. Raskite sveikąją skaičiaus

$$a_n = \underbrace{\sqrt{1999+\sqrt{1999+\sqrt{1999+\ldots+\sqrt{1999}}}}}_{n \text{ kartų}} \text{ dalį.}$$

10. Raskite $\left[\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right)^2\right]$, $n \in N$.



VI. KOMBINATORIKOS IR TIKIMYBIŲ SKAIČIAVIMO PRADMENYS

Pr. Survila (Vilniaus pedagoginis universitetas)

Tikimybių teorija plati ir sudėtinga matematinė teorija, kurios pagrindinės paprasčiausios sąvokos žinotinos ir kiekvienam vidurinio išsilavinimo siekiančiam jaunuoliui ir merginai. Įvykių tikimybės palyginti paprastais atvejais randamos naudojant kombinatoriką.

Šių nurodymų tikslas – padėti Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos moksleiviams geriau suprasti kombinatorikos uždavinių sprendimą ir patiems juos spręsti. Jie taip pat skiriami pagrindinių tikimybių teorijos sąvokų: įvykis, įvykio tikimybė, atsitiktinis dydis, jo skirstinys aiškinimui. Manau, jog kiekvienas iš jūsų, kuris neskubėdamas perskaitys pateikiamus nurodymus, supras ir savarankiškai išnagrinės pateiktus uždavinių sprendimus, pajėgs atlikti ir tas užduotis, kurios pridedamos savarankiškam sprendimui. Linkiu kantrybės ir užsispyrimo – jų dėka atsiranda mokėjimas ir įgūdžiai.

KOMBINATORIKOS TAISYKLĖS IR JŲ TAIKYMAI

Junginiais, rinkiniais arba kombinacijomis kombinatorikoje vadinami baigtinės aibės poaibiai turintys vieną, du, ..., k elementų, sutvarkyti arba nesutvarkyti, o taip pat baigtinės sekos, įvairių tipų elementų (vienas nuo kito nesiskiriančių daiktų) baigtiniai rinkiniai, kuriuose elementų tvarka gali būti svarbi arba nesvarbi, o patys elementai gali nesikartoti arba kartotis. Taigi tam, kad suprastume kombinatorikos sąvokas ir taisykles, reikia žinoti baigtinės aibės, jos elementų tvarkos, poaibio, sutvarkyto poaibio – baigtinės sekos sąvokas. Taip pat reikia suvokti, ką reiškia „aibės turi bendrų elementų“ – „aibės kertasi“, ir „aibės neturi bendrų elementų“ – „aibės nesikerta“.

Dvi baigtinės aibės A ir B neturi bendrų elementų – aibės A ir B nesikerta, jei aibėje A nėra elemento, kuris priklausytų aibei B, (aibėje B nėra elemento, kuris priklausytų aibei A). Priešingu atveju, kai aibėje A yra elementas, kuris priklauso ir aibei B (aibėje B yra elementas, kuris priklauso ir aibei A), aibės A ir B turi bendrų elementų – aibės A ir B kertasi.

Pavyzdžiui, aibės $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ir $B = \{11, 12, 13, 14, 15\}$ neturi bendrų elementų; aibės $C = \{a, b, c, d, e, f\}$, $D = \{k, l, a, b, g, e\}$ turi bendrus elementus a, b, e.

Jei aibėje A_1 yra m(A_1) elementų, aibėje A_2 yra m(A_2) elementų, ... , aibėje A_k yra m(A_k) elementų, ir tos aibės poromis nesikerta, tai parinkti vieną elementą, imant jį iš aibės A_1, arba iš aibės A_2, arba ... , arba iš aibės A_k galima m(A_1)+m(A_2)+...+m(A_k) skirtingų būdų.

Šis teiginys vadinamas **kombinatorine** (paprastąja) **sudėties taisykle**. Jos prasmė: m($A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$)= m(A_1)+m(A_2)+... + +m(A_k) – *baigtinių, poromis neturinčių bendrų elementų aibių sumos* (sąjungos) *elementų skaičius lygus tų aibių elementų skaičių sumai.*

Sprendžiant kombinatorikos uždavinius ši taisyklė viena praktiškai netaikoma. Ji taikoma su kita – **kombinatorine daugybos taisykle**.

Jei B_1, B_2, ... , B_s – baigtinės aibės, turinčios m(B_1), m(B_2), ..., m(B_s) elementų atitinkamai, tai rinkinį b_1, b_2, ... , b_s imant b_1 iš B_1, b_2 iš B_2, ..., ir b_s iš B_s galima sudaryti m(B_1)· m(B_2)·...· m(B_s) skirtingų būdų.

Kadangi aibė, kurios elementai yra kombinacijos ($b_1, b_2, \ldots, b_s$), $b_1 \in B_1$, $b_2 \in B_2$, ... , $b_s \in B_s$ vadinama aibių B_1, B_2, ... , B_s Dekarto sandauga, tai kombinatorinės daugybos taisyklės prasmė: *baigtinių aibių Dekarto sandaugos elementų skaičius lygus tų aibių elementų skaičių sandaugai.*

Svarbu suvokti, jog sudėties taisyklė taikoma tada, kai rinkinys (kombinacija, junginys) sudaromas naudojant jungtį **arba**, o aibės, iš kurių elementai imami (pasirenkami), poromis nesikerta; daugybos taisyklė taikoma tada, kai rinkinys (kombinacija, junginys) sudaromas naudojant jungtį **ir**, o aibės, iš kurių imami elementai yra bet kokios (baigtinės).

Pavyzdžiai.

1. Mokykloje yra trys aštuntos klasės. 8_1 klasėje yra 23 mokiniai, 8_2 klasėje – 27 mokiniai, 8_3 – 25 mokiniai. Pagal mokyklos tradicijas į mokinių tarybą aštuntos klasės deleguoja 2 narius – skirtingų aštuntų klasių mokinius. Kiek yra skirtingų tų dviejų narių pasirinkimo būdų?

Sprendimas. Du mokiniai iš skirtingų klasių gali būti parinkti šitaip: imant iš 8_1 ir iš 8_2, arba iš 8_1 ir 8_3, arba iš 8_2 ir 8_3. Kadangi kombinacijos sudaromos panaudojant jungtį „arba“, tai jų skaičius randamas panaudojant sudėties taisyklę:

$$n = n_{12} + n_{13} + n_{23};$$

čia n_{12}, n_{13}, n_{23} mokinių dvejetų skirtingų parinkimų iš atitinkamų klasių skaičiai. Jie randami naudojant daugybos taisyklę:

$$n_{12} = 23 \cdot 27,\quad n_{13} = 23 \cdot 25,\quad n_{23} = 27 \cdot 25..$$

Taigi

$$n = 23 \cdot 27 + 23 \cdot 25 + 27 \cdot 25 = 1871.$$

2. Kiek yra nemažesnių už 100 ir mažesnių už milijoną natūraliųjų skaičių, kurių skaitmenys skirtingi?

*Sprendimas.*Natūralusis skaičius a yra nemažesnis už 100 ir mažesnis už milijoną, jei „a yra triženklis, arba a yra keturženklis, arba a yra penkiaženklis, arba a yra šešiaženklis“. Todėl pagal sudėties taisyklę

$$n = n_3 + n_4 + n_5 + n_6..$$

Čia n_k, $k = 3, 4, 5, 6$, k-ženklių natūraliųjų skaičių, neturinčių vienodų skaitmenų, skaičius. Randame kiekvieną iš jų. Visus samprotavimus užrašome skaičiuodami n_6. Skaitmenų aibę pažymime raide S. $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Skaičius a – šešiaženklis ir neturi vienodų skaitmenų, jei $a = c_5c_4c_3c_2c_1c_0$, c_5 paimtas iš aibės $S\backslash\{0\}$, kurioje 9 elementai, c_4 paimtas iš aibės $S\backslash\{c_5\}$, kurioje 9 elementai, c_3 paimtas iš aibės $S\backslash\{c_5, c_4\}$, kurioje 8 elementai, c_2 paimtas iš aibės $S\backslash\{c_5, c_4, c_3\}$, kurioje 7 elementai, c_1 paimtas iš aibės $S\backslash\{c_5, c_4, c_3, c_2\}$, kurioje 6 elementai, ir c_0 paimtas iš aibės $S\backslash\{c_5, c_4, c_3, c_2, c_1\}$, kurioje 5 elementai. Čia $S\backslash\{0\}$ reiškia skaitmenų aibę, kurioje nėra skaitmens 0, $S\backslash\{c_5\}$ – skaitmenų aibę be skaitmens c_5, $S\backslash\{c_5, c_4\}$ – skaitmenų aibę be skaitmenų c_5 ir c_4 ir t.t. Kadangi junginiai sudaryti panaudojant jungtį „ir“, tai jų skaičių randame panaudoję daugybos taisyklę

$$n_6 = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 136080.$$

Analogiškai samprotaudami rasime

$$n_5 = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216,$$

$$n_4 = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536,$$
$$n_3 = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648.$$

Taigi $n = n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = 168480$.

Šiuose nurodymuose detaliau aptarti junginių tipus ir tipinių junginių skaičių radimo formules neįmanoma. Todėl patariu pasinaudoti knygomis: Petras Vaškas, Pranas Survila, „Pakartokime matematiką". „Šviesa", 1997, arba Albertas Steponavičius „Matematika". „Šviesa", 1998. Be abejo galite naudotis ir bet kuria kita jums prieinama kombinatorikos ar tikimybių teorijos knyga.

Panagrinėkime uždavinius, kuriuos sprendžiant vietoje kombinatorinės daugybos taisyklės galima taikyti tinkamą junginių skaičiaus formulę.

3. Aštuonis turistus reikia apgyvendinti dviejuose viešbučio kambariuose taip, kad kiekviename kambaryje būtų nemažiau, kaip 3 žmonės. Keliais skirtingais būdais galima tai padaryti?

Sprendimas. Aštuonių turistų paskirstymas į kambarius atitiks sąlygą, jei: pirmame kambaryje apsigyvens 3, o antrame 5 turistai; arba pirmame 4, ir antrame 4; arba pirmame 5, o antrame 3. Pagal sudėties taisyklę $n = n_{35} + n_{44} + n_{53}$. Kadangi į pirmąjį kambarį, parinkus 3 turistus, likę 5 eina į antrąjį, tai $n_{35} = C_8^3$ – derinių (poaibių) iš 8 elementų po tris elementus skaičius. Analogiškai:

$$n_{44} = C_8^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70, \quad n_{53} = C_8^5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

Todėl $n = 56 + 70 + 56 = 182$.

4. Jonukas nusipirko loto „5 iš 50" kortelę. Kiek yra laimingų penketukų, kai laimi kortelė, kurioje teisingai nurodyti bent 3 skaičiai?

Sprendimas. Kortelė „laiminga", jei joje: teisingai nurodyti 3 skaičiai ir neteisingai 2 skaičiai, *arba* teisingai nurodyti 4 skaičiai ir neteisingai 1 skaičius, *arba* teisingai nurodyti 5 skaičiai. Pagal sudėties taisyklę $n = n_3 + n_4 + n_5$.

Kombinacija „teisingai nurodyti 3 skaičiai ir neteisingai 2 skaičiai" – „3 skaičiai parinkti iš 5-ių tiražo skaičių ir 2 skaičiai iš 45, nepatekusių į tiražą". Prisiminę derinių ir jų skaičiaus formulę bei panaudoję daugybos taisyklę, gauname

$$n_3 = C_5^3 \cdot C_{45}^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{45 \cdot 44}{1 \cdot 2} = 9900.$$

Kombinacija „teisingai nurodyti 4 skaičiai ir neteisingai 1“ – „4 skaičiai parinkti iš 5-ių tiražo skaičių ir 1 iš likusių 45-ių, nepatekusių į tiražą“. Taigi

$$n_4 = C_5^4 \cdot C_{45}^1 = 5 \cdot 45 = 225.$$

Analogiškai randame: $n_5 = 1$. Taigi

$$n = 9900 + 225 + 1 = 10126.$$

ATSITIKTINIŲ ĮVYKIŲ TIKIMYBIŲ SKAIČIAVIMAS

Jei eksperimento galimas baigtis pažymėsime raidėmis $e_1, e_2, \dots, e_n$, tai gausime eksperimento baigčių aibę

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}.$$

Įvykio A tikimybė $P(A) = P(e_{i_1}) + P(e_{i_2}) + \dots + P(e_{i_k})$ *yra tą įvykį sudarančių elementariųjų įvykių tikimybių suma.* Elementariųjų įvykių tikimybes $p_i = P(e_i)$, kurios tenkina sąlygas $0 \le p_i \le 1$, $i = 1, 2, \dots, n$ $(n \ge 2)$ ir $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, nustato eksperimentas. Ne visada jos žinomos.

Kai eksperimento visos baigtys yra vienodai galimos ir jų skaičius yra n, tai ir įvykio A tikimybė išreiškiama paprastai formule

$$P(A) = \frac{m_A}{n}.$$

Joje m_A – *įvykį A sudarančių elementariųjų įvykių* (palankių įvykiui A eksperimento baigčių) skaičius.

Formulės paprastumas yra apgaulingas, kadangi ir gana paprastų eksperimentų atvejais surasti skaičius n ir m_A yra nelengva. Tai matosi ir iš pateikiamų pavyzdžių.

5. Simetrinė moneta metama 6 kartus. Įvykis A – herbas atvirto 3 kartus. Apskaičiuokime $P(A)$.

Sprendimas. Eksperimento baigtis (baigties kodas) – šešių raidžių rinkinys *a b c d e f,* iš kurių kiekviena paimta iš aibės *{s, h}*. Tokių rinkinių skaičių *n* randame pagal daugybos taisyklę

$$n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64.$$

Įvykis „herbas atvirs 3 kartus", kai moneta metama 6 kartus, įvyks, jei sekoje *a b c d e f* bus trys raidės *h*. Raidė h gali būti įrašyta į bet kurių trijų raidžių iš šešių vietas. Taigi tokių sekų yra tiek, kiek bus aibės *{a, b, c, d, e, f}* poaibių (derinių) po 3 elementus, t.y. $m_A = C_6^3$.

Todėl $P(A) = \frac{C_6^3}{2^6} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$.

6. Eksperimentas – loto „5 iš 40" tiražas. Įvykis *A* – nupirktos kortelės 3 užbraukti skaičiai sutapo su tiražo penketuko skaičiais. Apskaičiuokime tikimybę $P(A)$.

Sprendimas. Tarkime, kad tiražas vykdomas be apgaulės – kiekvienas penketas skaičių iš 40 skaičių yra vienodai galimi. Penketų skaičius – derinių iš 40 po 5 elementus skaičius yra

$$n = C_{40}^5 = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 658008.$$

Įvykis *A* – „3 užbraukti skaičiai sutapo su tiražo penketuko skaičiais" – „3 skaičiai parinkti iš tiražo penkių skaičių ir du skaičiai parinkti iš į tiražą nepatekusių 45 skaičių". Pagal daugybos taisyklę

$$m_A = C_5^3 \cdot C_{45}^2 = 10 \cdot \frac{45 \cdot 44}{2} = 9900.$$

Taigi

$$P(A) = \frac{9900}{658008} = \frac{275}{18278} \approx 0{,}015.$$

Pastaba–klausimas. Ar verta pirkti tokios loterijos kortelę, jei tikimybė laimėti (mažiausią prizą) tokia maža?

Net ir tais atvejais, kai eksperimento baigtys vienodai galimos (vadinamais klasikiniais arba Laplaso bandymais), įvykių tikimybes apskaičiuoti pasitelkus tik kombinatoriką gali būti sudėtinga. Tenka naudotis tikimybių teorijos teoremomis *apie įvykiui priešingo įvykio, įvykių* (nesutaikomų) *sumos, įvykių* (nepriklausomų) *sandaugos tikimybes, pilnosios tikimybės formule.* Prireikus, ieškokite jų nurodytose arba kitose knygose.

Panagrinėkime vieną neklasikinį eksperimentą, kad suvoktume, kaip paprastais atvejais randamos su juo susietų įvykių tikimybės.

7. Šaulys pataiko į taikinį su tikimybe $\frac{2}{3}$. Jis šauna į taikinį 3 kartus. Sudarykite elementariųjų įvykių aibę. Apskaičiuokite elementariųjų įvykių tikimybes. Išreikškite įvykius *A, B, C, D* ir jų priešingus įvykius elementariaisiais ir raskite jų tikimybes, kai

A – nepataikė daugiau kaip 2 kartus;
B – pataikė vieną kartą;
C – pataikė du kartus;
D – pataikė nemažiau kaip 2 kartus.

Sprendimas. Tegu *t* reiškia „šaulys kliudė taikinį“, *n* – „šaulys prašovė pro šalį“. Sąlygoje duota $P(t)=\frac{2}{3}$, $P(n)=\frac{1}{3}$. Eksperimento baigčių aibė bus šitokia:

$$E=\{ttt, ttn, tnt, ntt, tnn, ntn, nnt, nnn\}.$$

Kadangi baigtys nėra vienodai galimos, tai jų tikimybes apskaičiuosime taikydami nepriklausomų įvykių sandaugos tikimybės formulę:

$$P(ttt)=P(t)\cdot P(t)\cdot P(t)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27},$$

$$P(ttn)=P(tnt)=P(ntt)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{27},$$

$$P(tnn)=P(ntn)=P(nnt)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{27},$$

$$P(nnn)=P(n)\cdot P(n)\cdot P(n)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}..$$

Visų elementariųjų įvykių tikimybių suma lygi vienetui: $\frac{8}{27}+3\cdot\frac{4}{27}+3\cdot\frac{2}{27}+\frac{1}{27}=1.$

Dabar įvykius *A, B, C, D* išreikšime elementariaisiais įvykiais ir apskaičiuosime jų tikimybes:

A – „nepataikė daugiau kaip 2 kartus – nepataikė 3 kartus, todėl

$A=\{nnn\}$ ir $P(A)=\frac{1}{27}$;

$B = \{tnn, ntn, nnt\}$,

$P(B) = P(tnn) + P(ntn) + P(nnt) = \frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{2}{9}$;

$C = \{ttn, tnt, ntt\}$,

$P(C) = P(ttn) + P(ntt) + P(tnt) = \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = \frac{4}{9}$;

D – „pataikė nemažiau kaip 2 kartus" – „pataikė 2 kartus" arba „pataikė 3 kartus". Taigi $D = C \cup \{ttt\}$. Todėl

$$P(D) = P(C) + P\{ttt\} = \frac{4}{9} + \frac{8}{27} = \frac{20}{27}.$$

Įvykiams priešingų įvykių tikimybes randame naudodami priešingo įvykio tikimybės formulę:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$,

$P(\overline{C}) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$,

$P(\overline{B}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$,

$P(\overline{D}) = 1 - \frac{20}{27} = \frac{7}{27}$.

Išreikškime įvykių A, B, C, D priešinguosius įvykius elementariaisiais:

$\overline{A} = E \setminus A = \{ttt, ttn, tnt, ntt, tnn, ntn, nnt\}$,

$\overline{B} = E \setminus B = \{ttt, ttn, tnt, ntt, nnn\}$,

$\overline{C} = E \setminus C = \{ttt, tnn, ntn, nnt, nnn\}$.

$\overline{D} = E \setminus D = \{tnn, ntn, nnt, nnn\}$.

Aštuntas uždavinys skiriamas paaiškinti, kaip taikoma bendroji įvykių sandaugos tikimybės formulė.

8. Dėžutėje yra 3 raudoni, 3 balti ir 2 juodi pieštukai. Iš jos vienas po kito išimama po vieną pieštuką. Raskite įvykio A – „juodas pieštukas bus išimtas pirma balto" tikimybę.

Sprendimas. Kad suprastume, kaip randama mus dominančio įvykio tikimybė, turime gerai suvokti, iš ko jis sudarytas. Juodasis pieštukas bus

išimtas pirma balto, kai: „pirmasis išimtas pieštukas bus juodas“ *arba* „pirmas išimtas pieštukas bus raudonas, o antrasis juodas“, *arba* „pirmas išimtas pieštukas raudonas ir antrasis raudonas, o trečiasis juodas“ *arba* „pirmasis raudonas, antrasis raudonas ir trečiasis raudonas, o ketvirtas juodas“. Užrašius simboliškai gausime šitokią įvykio išraišką:

$$A = \{j_1\} \cup \{r_1 j_2\} \cup \{r_1 r_2 j_3\} \cup \{r_1 r_2 r_3 j_4\}.$$

Čia $\{j_1\}$ reiškia, kad pirmasis išimtas pieštukas bus juodas, $\{r_1 j_2\}$ – kad pirmas pieštukas – raudonas, o antras – juodas ir pan.

Kadangi dėmenys yra nesutaikomi įvykiai, tai

$$P(A) = P\{j_1\} + P\{r_1 j_2\} + P\{r_1 r_2 j_3\} + P\{r_1 r_2 r_3 j_4\}.$$

Akivaizdu, $P\{j_1\} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Kadangi kiti dėmenys yra įvykių sandaugos, tai jų tikimybes apskaičiuosime naudodami įvykių sandaugos tikimybės bendrąją formulę: $P(BD) = P(B)P(D/B)$. Čia $P(D/B)$ – įvykio *D sąlyginė tikimybė*, kai žinoma, jog *B* įvyko.

Pagal ją turime

$$P\{r_1 j_2\} = P\{r_1\} \cdot P\{j_2 / r_1\} = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28},$$

nes, kai ištrauktas raudonas pieštukas, liko 7 pieštukai, tarp kurių 2 juodi pieštukai. Toliau

$$P\{r_1 r_2 j_3\} = P\{r_1 r_2\} \cdot P\{j_3 / r_1 r_2\}.$$

Kadangi $P\{j_3 / r_1 r_2\} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, nes, kai ištraukti 2 raudoni pieštukai, liko 6 pieštukai, tarp kurių 2 juodi, o

$$P\{r_1 r_2\} = P\{r_1\} \cdot P\{r_2 / r_1\} = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28},$$

tai

$$P\{r_1 r_2 j_3\} = \frac{3}{28} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{28}.$$

Analogiškai skaičiuodami, turėsime

$$P\{r_1 r_2 r_3 j_4\} = P\{r_1 r_2 r_3\} \cdot P\{j_4 / r_1 r_2 r_3\} =$$

$$= P\{r_1\} P\{r_2 / r_1\} P\{r_3 / r_1 r_2\} \cdot P\{j_4 / r_1 r_2 r_3\} = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{140}.$$

Galutinai gauname

$$P(A)=\frac{1}{4}+\frac{3}{28}+\frac{1}{28}+\frac{1}{140}=\frac{35+15+5+1}{140}=\frac{56}{140}=\frac{2}{5}.$$

9. Yra dvi vienodos dėžutės. Vienoje dėžutėje yra 3 balti ir 4 juodi rutuliukai, o kitoje dėžutėje 5 balti ir 5 juodi rutuliukai. Atsitiktinai pasirinkus dėžutę iš jos išimamas rutuliukas. Apskaičiuokite tikimybę, kad jis juodas (įvykis A), tarę, kad abiejų dėžučių pasirinkimo tikimybės lygios.

Sprendimas. Pažymėkime A_1 – juodas rutuliukas ištrauktas iš pirmos dėžutės, A_2 – juodas rutuliukas ištrauktas iš antros dėžutės, D_1 – pasirinkta pirmoji dėžutė, D_2 – pasirinkta antroji dėžutė. Kadangi įvykis A yra „pasirinkta pirmoji dėžutė *ir* iš jos ištrauktas juodas rutuliukas, *arba* pasirinkta antroji dėžutė *ir* iš jos ištrauktas juodas rutuliukas“, tai $A=(D_1A_1)+(D_2A_2)$.

Dėmenys yra nesutaikomi įvykiai, todėl

$$P(A)=P(D_1A_1)+P(D_2A_2).$$

Pagal bendrąją įvykių sandaugos tikimybės formulę gauname

$$P(D_1A_1)=P(D_1)P(A_1/D_1),$$

$$P(D_2A_2)=P(D_2)P(A_2/D_2).$$

Taigi gauname išraišką

$$P(A)=P(D_1)P(A/D_1)+P(D_2)P(A/D_2),$$

vadinamą *pilnosios tikimybės formule.*

Kadangi pagal sąlygą

$$P(D_1)=P(D_2)=\frac{1}{2}.$$

Be to $P(A_1/D_1)=\frac{4}{7}$, $P(A_2/D_2)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$. Todėl

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{8+7}{28}=\frac{15}{28}.$$

Susipažinkime su atsitiktinio dydžio *tikimybių skirstinio* radimu paprastu atveju.

10. Moksleivis laiko lietuvių kalbos ir matematikos egzaminus. Jo galimų pažymių tikimybės yra šitokios

Pažymys		10	9	8
P	Lietuvių kalba	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
(tikimybės)	Matematika	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Pažymėkime raide X moksleivio gautų pažymių sumą. Kokioms reikšmėms ir su kokiomis tikimybėmis lygi pažymių suma?

Sprendimas. Tegu T_l ir T_m – lietuvių kalbos ir matematikos pažymiai. Turime $X = T_l + T_m$.

Taigi galimos X reikšmės yra: 16, 17, 18, 19, 20.

Apskaičiuojame tikimybes (įvykių): $P(X=16)$, $P(X=17)$, $P(X=18)$, $P(X=19)$, $P(X=20)$, tarę, jog vieno egzamino pažymys nepriklauso nuo kito egzamino rezultato.

Kadangi

$$\{X=16\} = \{T_l = 8, T_m = 8\},$$

todėl

$$P(X=16) = P(T_l = 8) \cdot P(T_m = 8) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

Iš to, kad $\{X=17\} = \{T_l = 9, T_m = 8\} \cup \{T_l = 8, T_m = 9\}$, gauname

$$P(X=17) = P(T_l = 9) \cdot P(T_m = 8) + P(T_l = 8) \cdot P(T_m = 9) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

Kadangi

$$\{X=18\} = \{T_l = 10, T_m = 8\} \cup \{T_l = 9, T_m = 9\} \cup \{T_l = 8, T_m = 10\},$$

tai

$$P(X=18) = P(T_l = 10) \cdot P(T_m = 8) + P(T_l = 9) \cdot P(T_m = 9) +$$

$$+ P(T_l = 8) \cdot P(T_m = 10) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Analogiškai

$$\{X = 19\} = \{T_l = 10, T_m = 9\} \cup \{T_l = 9, T_m = 10\},$$

todėl

$$P(X = 19) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

$$P(X = 20) = P(T_l = 10) \cdot P(T_m = 10) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Atsakymą galime pateikti lentele

X reikšmės	x_i	16	17	18	19	20
Tikimybės	*Pi*	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

Šia lentele apibrėžta funkcija vadinama (atsitiktinio) *dydžio X tikimybių skirstiniu.* x_i – čia yra *atsitiktinio dydžio* (argumento) *reikšmės* – skaičiai, P_i – *įvykių* $X = x_i$ *tikimybės* – neneigiami skaičiai, kurių suma lygi vienetui. Šiame uždavinyje tai yra $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = 1$.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Kiek yra didesnių už 100, bet mažesnių už 100 000 natūraliųjų skaičių, kurių skaitmenys yra lyginiai ir skirtingi?

2. Parduotuvėje yra septynios skirtingų pavadinimų lietuviškų saldainių dėžutės, šešios skirtingų pavadinimų latviškų saldainių dėžutės, keturios skirtingų pavadinimų vokiškų saldainių dėžutės. Kiek skirtingų pasirinkimo variantų turi pirkėjas, jei jis nori pirkti: a) vieną dėžutę saldainių; b) dvi skirtingas dėžutes saldainių; c) dvi dėžutes skirtingų šalių saldainių; d) tris skirtingas dėžutes saldainių; e) tris dėžutes skirtingų šalių saldainių?

3. Mokyklos šventės loterija – „6 iš 30“. Onutė pirko vieną kortelę ir užbraukia 6 skaičius. Kiek yra „nelaimingų“ šešetų, jei laimės kortelė, kurioje teisingai nurodyti daugiau kaip du skaičiai?

4. Aibės A poaibis B vadinamas tiesioginiu, jei $B \neq \varnothing$ ir $B \neq A$. Kiek tiesioginių poaibių turi aibė $\{a, b, c, d, e\}$?

5. Dėžėje 12 vienodų detalių, 3 iš kurių brokuotos. Iš dėžės ištraukiama detalė, patikrinama ir grąžinama į dėžę. Po to atsitiktinai išimama dar viena detalė ir patikrinus grąžinama į dėžę. Vėliau atsitiktinai išimama dar viena detalė ir patikrinama. Sudarykite elementariųjų įvykių aibę. Apskaičiuokite elementariųjų įvykių tikimybes.

6. Iš 15 berniukų skirtingais vardais, tarp kurių yra Petras ir Jonas, atsitiktinai atrenkami 3 berniukai. Apskaičiuokite tikimybes įvykių: A – Petras ir Jonas yra tarp atrinktųjų; B – Petro ir Jono nėra tarp atrinktųjų; C – bent vienas iš jų yra tarp atrinktųjų.

7. Prekeivis pardavinėja keturių pavadinimų šokoladukus: „Veliuona", „Rusnė", „Lazdynai", „Neris". Pirkėjas nusipirko septynis šokoladukus juos atsitiktinai pasirinkęs iš pardavinėjamų keturių pavadinimų šokoladukų. Raskite tikimybes įvykių:
A – visi 7 šokoladukai „Veliuona";
B – 2 šokoladukai iš 7 yra „Neris";
C – iš 7 šokoladukų 2 šokoladukai „Rusnė" ir 1 šokoladukas „Lazdynai";
D – tarp 7 šokoladukų yra nemažiau kaip 4 šokoladukai „Lazdynai".

8. Dėžėje 3 balti ir 4 juodi rutuliai. Trys vaikai paeiliui ima negrąžindami atgal po vieną rutulį iš dėžės. Laimi tas, kas pirmas paima baltą rutulį. Apskaičiuokite tikimybes įvykių: A – laimi pirmasis; B – laimi antrasis; C – laimi trečiasis.

9. Šeimoje trys dukterys – Alė, Valė, Dalė, kurios visuomet kartu plauna lėkštes. Alė vyriausia, todėl jai paprastai tenka išplauti 40 % visų lėkščių, o jaunėlėms Dalei ir Valei – po 30 %. Tikimybė, jog Alė sudaužys vieną lėkštę, lygi 0,02. Šitokios tikimybės Valei ir Dalei yra atitinkamai 0,02 ir 0,03. Vieną vakarą išplovus lėkštes, mama rado sudužusią lėkštę. Apskaičiuokite tikimybę, jog nepasisekė: a) Alei; b) Valei; c) Dalei.

10. Dvi futbolo komandos „Atletas“ ir „Zuikis“ susitiko tarpusavyje 2 kartus. Laimėjimas suteikia komandai 2 taškus, lygiosios – 1 tašką, pralaimėtos – 0 taškų. Raskite „Zuikio“ taškų sumos tikimybių skirstinį, jei „Zuikis“ kiekvienas rungtynes laimi su tikimybe $\frac{1}{3}$, sužaidžia lygiomis su tikimybe $\frac{1}{4}$, o rungtynių rezultatai yra nepriklausomi.



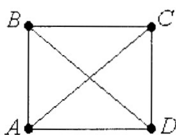
VII. GRAFAI

L.Maliaukienė, J.Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

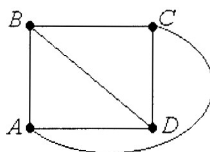
Inžinierius braižo elektros tinklo schemas, istorikas – genealoginius medžius, chemikas sudarinėja medžiagos struktūros formules, dispečeris – produkcijos išvežiojimo planus. Kas yra bendra jų veikloje? Visi jie braižo schemas, sudarytas iš taškų, kurie sujungti atkarpomis arba kreivėmis.

Grafas yra figūra, sudaryta iš taškų (vadinamų viršūnėmis) ir atkarpų (vadinamų briaunomis). Kai briauna jungia viršūnę su ja pačia, ji vadinama kilpa.

Grafas, pavaizduotas 1a pav., turi 4 viršūnes ir 6 briaunas. Briaunų AC ir BD susikirtimo taškas nėra viršūnė. Šį grafą galima pavaizduoti ir kitaip (žr. 1 b pav.).



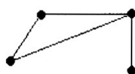
1a pav.



1b pav.

Du grafai vadinami *izomorfiniais*, jeigu jie turi vienodą viršūnių skaičių ir vieno grafo dvi viršūnes jungiančią briauną atitinka kito grafo atitinkamas viršūnes jungianti briauna.

1 pav. pavaizduoti grafai yra izomorfiniai, o 2 pav. – ne.





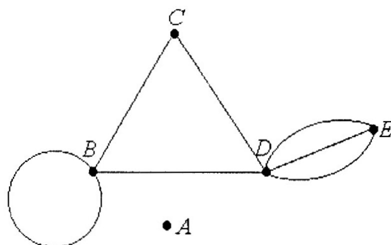
2 pav.

Dvi grafo viršūnės vadinamos *gretimomis*, jeigu jas jungia bent viena briauna.

Grafo, pavaizduoto 3 pav., viršūnės B ir C yra gretimos, o C ir E – nėra gretimos. Viršūnė B yra gretima pati sau.

Viršūnės v *laipsniu* vadinamas iš tos viršūnės išeinančių briaunų skaičius ir žymimas deg v.

Grafo, pavaizduoto 3 pav., viršūnės C laipsnis $\deg C = 2$, o $\deg D = 5$ ir $\deg B = 4$.



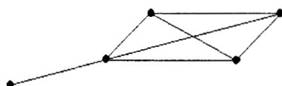
3 pav.

Viršūnė, kurios laipsnis lygus nuliui, vadinama *izoliuota* (pvz., viršūnė A 3 pav.).

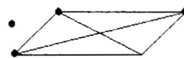
Grafo *keliu* (*maršrutu*) vadinama seka, sudaryta iš gretimų viršūnių ir jas jungiančių briaunų. Kelias vadinamas *ciklu*, jei jis prasideda ir baigiasi ta pačia viršūne.

Grafas vadinamas *jungiu*, jeigu bet kurias dvi jo viršūnes galima sujungti keliu.

Grafas, pavaizduotas 4a pav., yra jungus, o 4b pav. – ne.

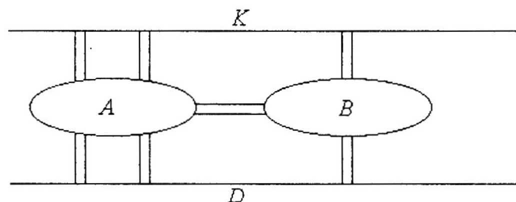


4a pav.



4b pav.

Grafų teorijos pradininku laikomas L.Oileris (1707–1783), išsprendęs gerai žinomą uždavinį apie Karaliaučiaus tiltus.



5 pav.

Per Karaliaučiaus miestą teka Prėgliaus upė, kurioje yra dvi salos: A ir B. Šios salos su kairiuoju ir dešiniuoju upės krantais K ir D bei tarpusavyje sujungtos septyniais tiltais (žr. 5 pav.). Reikia nustatyti, ar galima rasti tokį maršrutą, kuriuo einant būtų galima pereiti visus tiltus tik po vieną kartą ir grįžti į tą pačią vietą.

Spręsdamas šį uždavinį, Oileris suformulavo šias teoremas:

1 teorema. Visų grafo viršūnių laipsnių suma yra lygi dvigubam grafo briaunų skaičiui, t.y.

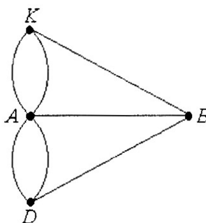
$$\sum_i \deg v_i = 2q,$$

čia v_i grafo viršūnės, q – briaunų skaičius.

Išvada. Grafo nelyginio laipsnio viršūnių skaičius yra lyginis.

Kelias, kurį sudaro visos jungiojo grafo briaunos (įeinančios lygiai po vieną kartą) vadinamas *Oilerio keliu.* Jei šis kelias prasideda ir baigiasi toje pačioje viršūnėje, tai jis vadinamas *Oilerio ciklu.*

2 teorema. Grafas turi Oilerio ciklą tik tada, kai visų jo viršūnių laipsniai yra lyginiai.



6 pav.

Dabar jau galime nurodyti Karaliaučiaus tiltų uždavinio sprendimą: nubrėžkime grafą, kurio viršūnės A, B, K, D yra dvi salos ir upės krantai, o briaunos – jas jungiantys tiltai. Kadangi šis grafas turi viršūnių su nelyginiais laipsniais, tai, remiantis 2 teorema, jame nėra Oilerio ciklo. Taigi tokio maršruto, kaip suformuluoto uždavinio sąlygoje, nėra.

Panagrinėkime dar vieną uždavinį: ar sodų bendrijoje, kurioje yra 35 nariai, galima taip padalyti žemės sklypus, kad kiekvienas sodininkas turėtų vieną, tris arba penkis kaimynus?

Sprendimas. Jeigu taip padalyti būtų galima, tai šį padalinimą atitiktų grafas, turintis 35 viršūnes (sodininkai), ir iš kiekvienos viršūnės išeitų 1, 3 ar 5 briaunos, rodančios kaimynų skaičių. Taigi turėtume

grafą, kurio visų viršūnių, kurių yra nelyginis skaičius, laipsniai yra nelyginiai, o tai prieštarauja 1 teoremos išvadai. Taigi tokiu būdu sklypų padalyti negalima.

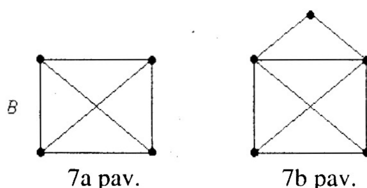
3 teorema. Sakykime, G – jungusis grafas, turintis daugiau kaip dvi viršūnes su nelyginiais laipsniais. Tuomet grafe G nėra Oilerio kelio.

Išvada. Tegu G – jungusis grafas, turintis dvi viršūnes su nelyginiais laipsniais, tuomet grafe G yra Oilerio kelias, prasidedantis vienoje iš šių viršūnių ir pasibaigiantis kitoje.

Remiantis šia teorema ir jos išvada, atsakoma į klausimą, ar galima nubrėžti figūrą, neatitraukiant rašiklio nuo popieriaus lapo ir nekartojant jau nubrėžtų linijų (per viršūnes galima eiti keletą kartų).

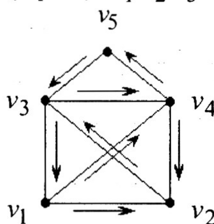
Pavyzdžiui, ištirsime, ar galima 7 pav. pavaizduotas figūras nubraižyti aukščiau minėtu būdu.

Sprendimas. Remiantis 3 teorema, 7a pav. figūros taip nubraižyti negalima, 7b pav. figūrą nurodytu būdu nubraižyti galima (remiantis 3 teoremos išvada).



7a pav. 7b pav.

Maršrutas gali būti toks (8 pav.): $v_1\ v_2\ v_3\ v_1\ v_4\ v_5\ v_3\ v_4\ v_2$



8 pav.

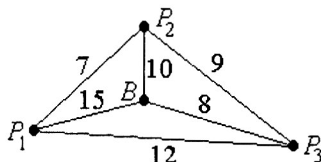
Kai grafas turi nedaug viršūnių ir briaunų, Oilerio kelią ar ciklą rasti nesunku. Sudėtingesniuose grafuose tai galima atlikti [1] knygoje nurodytais būdais.

Įvairiose mokslo ir gyvenimo srityse naudojami grafai, kurių briaunoms priskiriami tam tikri skaičiai (vadinami svoriais), o toks grafas vadinamas *svoriniu grafu*. Briaunų svoriai gali reikšti atstumą, laiką, išlaidas ir pan. Svorinio grafo pavyzdžiu gali būti kelių žemėlapis su nurodytais atstumais tarp atitinkamų vietovių.

Svoriniuose grafuose ieškosime ciklo (maršruto), kuris yra trumpiausias (pigiausias). Tokie maršrutai vadinami *optimaliais*.

Jeigu ciklas eina per kiekvieną viršūnę tik po vieną kartą, jis vadinamas *Hamiltono* (1805–1865) *ciklu*. (Šis Hamiltono ciklo apibrėžimas tinka ir nesvoriniams grafams. Ar grafas turi Hamiltono ciklą, atsakyti sunku. Toliau nagrinėsime tik tokius grafus, kurie turi Hamiltono ciklus.) Apie šiuos ciklus plačiau galima pasiskaityti [1] knygoje.

1 pavyzdys. Atstumai (kilometrais) nuo bazės B iki parduotuvių ir atstumai tarp parduotuvių pažymėti grafe (9 pav.). Pastebėsime, kad grafo briaunų ilgiai su nurodytais atstumais nieko bendro neturi.



9 pav.

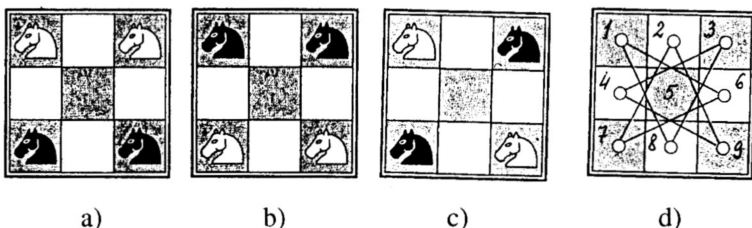
Sprendimas. Užrašykime visus Hamiltono ciklus, išeinančius iš viršūnės B ir apskaičiuokime ciklų svorių sumą.

Hamiltono ciklas	Ciklo svoris	Atvirkštinis ciklas
1. $BP_2P_3P_1B$	$10+9+12+15=46$	$BP_1P_3P_2B$
2. $BP_1P_2P_3B$	$15+7+9+8=39$	$BP_3P_2P_1B$
3. $BP_3P_1P_2B$	$8+12+7+10=37$	$BP_2P_1P_3B$

Taigi matome, kad trečiasis Hamiltono ciklas, aišku, ir jam atvirkštinis turi mažesnį svorį negu kiti. Prekių optimalūs išvežiojimų maršrutai yra $BP_3P_1P_2B$ arba $BP_2P_1P_3B$.

2 pavyzdys. 10 pav. pavaizduota 3×3 „šachmatų lenta“ ir joje pastatyti du balti ir du juodi žirgai. Žirgų ėjimai pavaizduoti 10 pav. d).

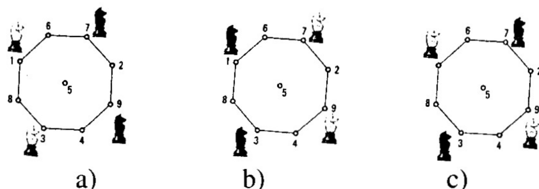
Ištirsime, ar galima iš a) padėties žirgus pastatyti į b) ir c) padėtis. Jeigu galima, surasime kokiu mažiausiu ėjimų skaičiumi tai atliekama.



a) b) c) d)

10 pav.

Sprendimas. Nubraižykime žaidimo padėčių a), b) ir c) grafus (11 pav.).



a) b) c)

11 pav.

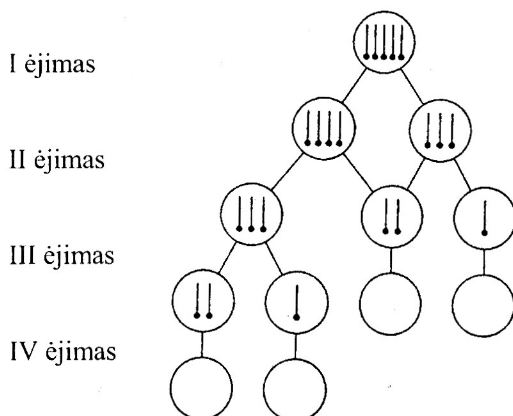
Žirgo ėjimus lentoje atitinka grafo briaunos. Jeigu eisime viena kryptimi, tai kiekvienam žirgui reikės padaryti po 4 ėjimus, kad visi jie užimtų b) padėtį. Taip po 16 ėjimų iš a) padėties gauname b) padėtį. Kadangi žirgai gali eiti tik į tuščius langelius, tai iš situacijos a) negalime gauti situacijos c).

3 pavyzdys. Ant stalo padėti 5 degtukai. Du žaidėjai paeiliui ima po vieną arba po du degtukus. Laimės tas, kuris paima paskutinį (paskutinius) degtuką. Nubraižysime šio žaidimo grafą ir iš jo sužinosime kaip turi žaisti žaidėjas, kad laimėtų.

Sprendimas. Nubraižome žaidimo grafą. Toks grafas dar vadinamas medžiu. Medžiai taikomi tikimybių teorijoje skaičiuojant įvykių tikimybes.

Iš grafo matyti, kad po 1-ojo ėjimo ant stalo liks arba 3, arba 4 degtukai. Jeigu pirmasis žaidėjas ant stalo palieka 3 degtukus, tai jis išlošia, nes antrasis žaidėjas gali ant stalo palikti arba vieną, arba du degtukus, kuriuos trečiuoju ėjimu paims pirmasis žaidėjas. Jeigu pirmasis žaidėjas

pirmuoju ėjimu palieka ant stalo 4 degtukus, tai (racionaliai žaidžiant antrajam žaidėjui) jis pralošia.



12 pav.

Užduotis. Nubraižykite grafą, kai ant stalo yra 7 degtukai.

Literatūra

P.Tannenbaumas, R..Arnoldas. Kelionės į šiuolaikinę matematiką. TEV, Vilnius, 1995.

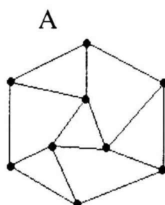
SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. a) Nubraižykite grafą, turintį 6 viršūnes, kurių laipsniai lygūs 4, o briaunos nesikerta.

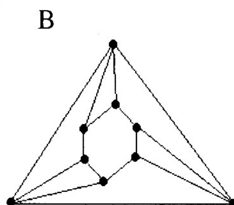
b) Nubraižykite grafą, turintį 6 viršūnes, kurių laipsniai lygūs 3 ir bet kurios 3 briaunos nesudaro trikampio.

2. Ar izomorfiniai grafai: 1) A ir B; 2) C ir D?
Jeigu grafai izomorfiniai, sunumeruokite jų atitinkamas viršūnes.

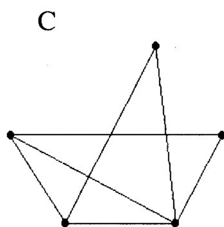
A



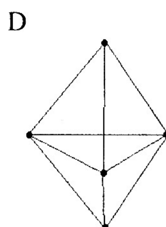
B



C



D



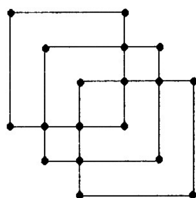
3. *X* apskrityje yra 17 miestelių, kurių kiekvienas sujungtas vieškeliais mažiausiai su kitais 8 miesteliais. Įrodykite, kad iš bet kurio miestelio galima nuvažiuoti vieškeliu į bet kurį kitą miestelį.

4. Klasėje yra 25 mokiniai. Ar gali būti, kad kiekvienas iš 11 mokinių turėtų po 3 draugus, 8 mokiniai – po 2 draugus ir 6 mokiniai po 5 draugus?

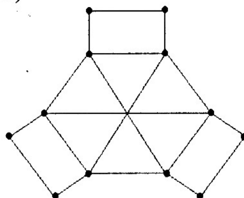
5. Sodo bendrijoje yra 27 nariai. Ar galima suprojektuoti telefono tinklą taip, kad kiekvienas sodininkas telefono laidu būtų sujungtas su 5 kitais sodininkais?

6. Nubraižykite Oilerio ciklą.

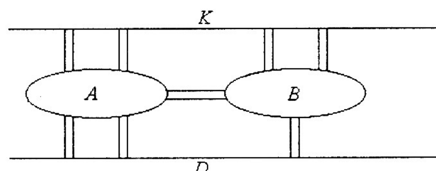
a)



b)



7. Paveikslėlyje pavaizduota upė, kurioje yra dvi salos A ir B su krantais K ir D. Salos su upės krantais bei tarpusavyje sujungtos 8 tiltais.



a) Ar galima rasti tokį pasivaikščiojimo maršrutą, kuriuo einant galima būtų pereiti visus tiltus po vieną kartą ir grįžti į tą pačią vietą? (Ar egzistuoja Oilerio ciklas?)

b) Ar galima pasivaikščioti pereinant kiekvieną tiltą po vieną kartą? (Ar egzistuoja Oilerio kelias?) Jeigu taip, tai nurodykite maršrutą.

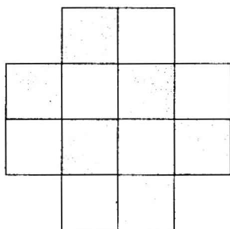
8. 1. Žirgas stovi 3×4 „šachmatų lentos“ kairiajame kampe 1-ame langelyje.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

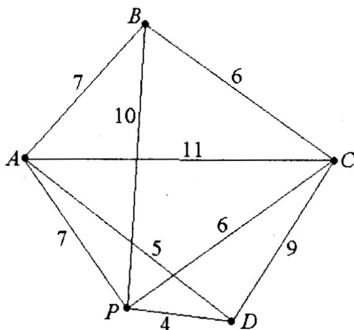
a) Nubraižykite grafą, kurio viršūnės yra lentos langeliai, o briaunos – leistini žirgo ėjimai.

b) Nubraižytame grafe raskite Hamiltono kelią, prasidedantį 1-ame langelyje, t.y. parodykite, kaip turi šokinėti žirgas, kad jis, pradėjęs iš 1-ojo langelio, apeitų visus lentos langelius lygiai po vieną kartą.

8. 2. Nurodykite, kaip žirgu apeiti pavaizduotos „šachmatų lentos"visus langelius, ten pabuvojus po vieną kartą, ir grįžti į pradinę padėtį. (Surasti Hamiltono ciklą.)



9. Paštininkas iš pašto *P* turi išvežioti korespondenciją abonentams *A*, *B*, *C* ir *D* ir grįžti atgal. Sugaištas tam laikas (minutėmis) pavaizduotas schemoje. Raskite optimalų maršrutą, t.y. tokį, kuriuo važiuojant iš pašto *P* ir grįžtant į jį, būtų sugaištama mažiausiai laiko.



10. Omega planetų sistemos kiekvienoje planetoje įrengta observatorija ir astronomas stebi jam artimiausią planetą. Atstumai tarp planetų yra skirtingi. Įrodykite, kad vienos planetos niekas nestebi, jeigu planetų yra nelyginis skaičius.

BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

A.Apynis, E.Stankus (Vilniaus universitetas),
J.Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

I variantas

1. Raskite funkcijos $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 6x + 13}}$ reikšmių sritį.

2. Raskite visų triženklių skaičių, kurie dalijasi iš 3, sumą.

3. Trikampio kraštinių ilgiai sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas lygus 2. Raskite visus galimus trumpiausios kraštinės ilgius, kad trikampis būtų smailusis.

4. Apskaičiuokite $f(2)$, kai $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 3x$.

5. Yra keturios atkarpos, kurių ilgiai 2, 5, 6 ir 10 centimetrų. Kokia tikimybė, kad, atsitiktinai pasirinkus tris atkarpas, iš jų bus galima sudėti trikampį?

6. Išspręskite lygtį $4\sin \pi x = 4x^2 - 4x + 5$.



Užduočių sprendimai



STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Jeigu antrasis turistas atstumą nueina per x val., tai pirmasis – per (x+5) val. Sakykime S – atstumas tarp A ir B. Tuomet turistų greičiai yra $\frac{S}{x+5}$ ir $\frac{S}{x}$. Taigi $\frac{10}{3}\cdot\frac{S}{x+5}+\frac{10}{3}\cdot\frac{S}{x}=S$. Iš čia $x = 5$.

Ats.: Antrasis turistas atstumą tarp vietovių A ir B nueina per 5 h, o pirmasis – per 10 h.

2. Sakykime, Antano žingsnio ilgis yra x m, o Rolandas iki mokyklos žengia y žingsnių. Tuomet Rolando žingsnio ilgis $1{,}1x$, o Antanas per tą patį laiką žengia $1{,}1y$ žingsnių.

Iki mokyklos Rolandas nuėjo $1{,}1x\cdot y$ metrų, o Antanas per tą patį laiką –$x\cdot 1{,}1y$ metrų. Matome, kad $1{,}1x\cdot y = x\cdot 1{,}1y$. Taigi abu broliai į mokyklą atėjo vienu metu.

Ats.: Į mokyklą broliai atėjo vienu metu.

3. Sakykime, matematiko gimimo metai yra $\overline{1xyz}$. Tuomet pagal sąlygą:

$$\begin{cases} 1+x+y+z=21, \\ \overline{1xyz}+5355=\overline{zyx1}. \end{cases}$$

Šios sistemos antrąją lygtį parašome šitaip:

$$1000+100x+10y+z+5355=z\cdot 1000+100y+10x+1$$

arba

$$10(10x+y+635)+z+5=10(100z+10y+x)+1.$$

Iš čia matome, kad skaičiaus $z+5$ paskutinis skaitmuo turi būti vienetas, t.y. $z=6$. Tuomet $10x+y+636=600+10y+x$ arba $x-y=-4$. Išsprendę sistemą

$$\begin{cases} x-y=-4, \\ x+y+6=20 \end{cases}$$

gauname $x = 5$, $y = 9$. Taigi matematiko gimimo metai yra 1596. Tai Renė Dekartas.

Ats.: Garsus prancūzų matematikas Renė Dekartas gimė 1596 m.

4. Lygybę $x+\frac{1}{x}=3$ pakėlę kvadratu, gauname $x^2+\frac{1}{x^2}=7$. Šią lygybę vėl keliame kvadratu: $x^4+2x^2\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}=49$. Iš čia $x^4+\frac{1}{x^4}=47$. Gautąją lygybę pakeliame kvadratu: $x^8+2x^4\cdot\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^8}=2209$. Iš čia $x^8+\frac{1}{x^8}=2207$.

Ats.: 2207.

5. Pažymėję $\frac{x}{x+1}=t$, duotąją lygtį pertvarkome šitaip:

$$1+t+t^2(1+t)+t^4(1+t)+t^6(1+t)=0,$$

$$(1+t)\cdot(1+t^2+t^4+t^6)=0.$$

Antrasis sandaugos narys nelygus nuliui, todėl $1+t=0$, $t=-1$, $\frac{x}{x-1}=-1$. Iš čia $x=\frac{1}{2}$.

Ats.: $x=\frac{1}{2}$.

6. Nagrinėkime koordinačių plokštumoje taškus $M(x, y)$, $B(0, 8)$ ir $C(6, 0)$. Tuomet $BM=\sqrt{x^2+(8-y)^2}$, $MC=\sqrt{(x-6)^2+y^2}$ ir $a=BM+MC\geq BC=\sqrt{64+36}=10$.

Lygybės ženklas įgyjamas, kai taškas M yra atkarpoje BC (trikampio taisyklė), pavyzdžiui, kai $M(3, 4)$.

Ats.: 10.

7. $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1=$
$=(n^2+3n)^2+2\cdot(n^2+3n)+1=(n^2+3n+1)^2$.

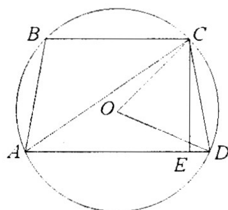
8. $\dfrac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ = \dfrac{1 - 4\sin 10^\circ \sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ} =$

$= \dfrac{1 - 2\cos 60^\circ + 2\cos 80^\circ}{2\sin 10^\circ} = \dfrac{\cos 80^\circ}{\sin 10^\circ} = \dfrac{\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = 1.$

9. Turime $\angle COD = 60°$, $CE = h$. $\angle CAD = 30°$, kaip įbrėžtinis į apskritimą kampas, besiremiantis į lanką CD. Tuomet $AC = 2h$ ir

$AE^2 = AC^2 - CE^2 = 4h^2 - h^2 = 3h^2$,

$AE = h\sqrt{3}$. Kita vertus, $AE = \dfrac{AD + BC}{2}$.



Todėl

$S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot CE = h\sqrt{3} \cdot h = \sqrt{3}\, h^2.$

Ats.: $\sqrt{3}\, h^2$.

10. Nagrinėkime stačiakampį $ABCD$, kurio kraštinė AB lygi 1 cm, o AD – 500 m. Trikampis AOD yra ieškomasis trikampis (čia O – įstrižainių susikirtimo taškas). Iš tikrųjų, jo visos aukštinės yra trumpesnės už 1 cm, o plotas lygus:

$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} AD \cdot OE \quad (OE \perp AD).$$

Kadangi $AD = 500$ m,

$$OE = \frac{1}{2} AB = 0{,}5 \text{ cm} = 0{,}005 \text{ m},$$

tai

$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} 500 \cdot 0{,}005 = 1{,}25 \ (\text{m}^2) > 1 \ (\text{m}^2).$$

Ats.: Yra.

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pagal sąlygą: $a+b+c=2$ ir $a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=0$. Kadangi $x=2$ yra vienintelis lygties $ax^2+bx+c=0$ sprendinys, tai jos diskriminantas lygus 0, t.y.

$$D=b^2-4ac=0.$$

Gavome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} a+b+c=2, \\ 4a+2b+c=0, \\ b^2-4ac=0. \end{cases}$$

Iš antrosios lygties atėmę pirmąją lygtį, gauname:

$$3a+b=-2 \text{ arba } b=-2-3a.$$

Iš pirmosios lygties randame:

$$c=2-a-b=2-a+2+3a=4+2a.$$

Įrašę į trečiąją lygtį b ir c reikšmes, gauname $a^2-4a+4=0$. Iš čia $a=2$. Tuomet $b=-2-3\cdot 2=-8$, $c=4+2\cdot 2=8$.

Ats.: $a=2$, $b=-8$, $c=8$.

2. Sakykime, kad x_1 ir x_2 yra lygties šaknis. Tuomet

$$x_1-x_2=5,\ x_1^3-x_2^3=35.$$

Kadangi

$$x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=5(x_1^2+x_1x_2+x_2^2),$$

tai

$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=7, \text{ t.y. } (x_1+x_2)^2-x_1x_2=7.$$

Pagal Vijeto teoremą: $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$. Vadinasi, $p^2-q=7$.

Iš lygčių sistemos $\begin{cases} x_1-x_2=5, \\ x_1+x_2=-p \end{cases}$ randame x_1 ir x_2:

$$x_1=\frac{5-p}{2},\ x_2=-\frac{5+p}{2}.$$

Tuomet $q=-\frac{5-p}{2}\cdot\frac{5+p}{2}=-\frac{1}{4}(25-p^2)$. Iš lygčių sistemos

$$\begin{cases} p^2-q=7, \\ q=-\frac{1}{4}(25-p^2) \end{cases}$$

randame parametrų p ir q reikšmes: $p_1=1$, $p_2=-1$, $q=-6$. Taigi $p+q$ didžiausia reikšmė yra $1-6=-5$.

Ats.: –5.

3. Pirmiausia funkciją užrašykime taip:

$$y=\sqrt{(x+1)^2+9}.$$

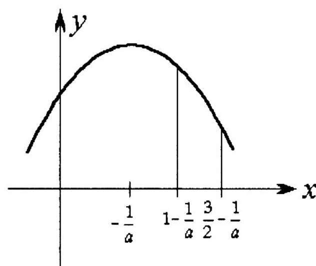
Funkcijos $g(x)=(x+1)^2+9$ mažiausia reikšmė yra 9. Be to, $g(x)\to\infty$, kai $x\to+\infty$. Taigi funkcijos $g(x)$ reikšmių sritis yra $[9;+\infty)$. Vadinasi, funkcijos $y=\sqrt{g(x)}$ reikšmių sritis yra $[3;+\infty)$.

4. Kadangi $a<0$, tai kvadratinio trinario grafiko (žr. 1 pav.) šakos nukreiptos žemyn. Parabolės viršūnės abscisė lygi $-\frac{1}{a}$. Taškas $x=-\frac{1}{a}$ yra kairėje intervalo $\left[1-\frac{1}{a};\ \frac{3}{2}-\frac{1}{a}\right]$ pusėje.

Taigi kvadratinis trinaris intervale $\left[1-\frac{1}{a};\ \frac{3}{2}-\frac{1}{a}\right]$ mažėja. Mažiausią reikšmę jis įgyja taške $x=\frac{3}{2}-\frac{1}{a}$.

Vadinasi, pagal sąlygą

$$a\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{a}\right)^2+2\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{a}\right)+7{,}5=3{,}5.$$



1 pav.

Pertvarkę gauname lygtį

$$9a^2+16a-4=0,$$

kurios sprendiniai $a_1 = -2$, $a_2 = \frac{2}{9}$. Pagal uždavinio sąlygą tinka tik $a = -2$.

Ats.: –2

5. Sakykime, pėsčiojo greitis x km/h ir jis kelionėje užtruko t h. Tuomet Atstumas tarp Giedraičių ir Molėtų – $x \cdot t$ km. Dviratininkas kelionėje užtruko $(t - 3{,}5)$ h $(t > 3{,}5$ h!) ir jo greitis $\frac{xt}{t-3{,}5}$ km/h. Iš sąlygos gauname lygtį:

$$1\frac{2}{3} \cdot \left(x + \frac{xt}{t-3{,}5} \right) = xt.$$

Iš jos randame t:

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 5\frac{5}{6}.$$

Kadangi $t > 3{,}5$, tai $t = 5\frac{5}{6}$ h. Vadinasi, dviratininkas iš Molėtų į Giedraičius nuvažiuoja per $5\frac{5}{6} - 3{,}5 = 2\frac{1}{3}$ h.

Ats.: 2 h 20 min.

6. Sakykime antrasis darbininkas dirbo x valandų. Kadangi pirmasis darbininkas pradėjo darbą 2 h 16 min. anksčiau, o jį baigė tik 16 min. anksčiau negu antrasis, tai pirmasis darbininkas dirbo $(x+2)$ h. Antrasis darbininkas po pietų dirbo

$$(20 \text{ h } 10 \text{ min} - (12 \text{ h} + 1 \text{ h } 30 \text{ min}) = = 6 \text{ h } 40 \text{ min} = 6\frac{2}{3} \text{ h}.$$

Kadangi abu darbininkai šienavo tik po pusę pievos, tai antrasis darbininkas per 1 h atliko $\frac{1}{2x}$ darbo dalį, o prieš pietus – $\frac{x - 6\frac{2}{3}}{2x}$ darbo dalį. Pirmasis darbininkas po pietų dirbo

$$19 \text{ h } 54 \text{ min} — (12 \text{ h} +1 \text{ h } 30 \text{ min}) = 6 \text{ h } 24 \text{ min} = 6\frac{2}{5} \text{ h},$$

o prieš pietus – $\left(x+2-6\frac{2}{5}\right)$ h. Per 1 h pirmasis darbininkas atliko $\frac{1}{2(x+2)}$ darbo dalį. Iki pietų pirmasis darbininkas atliko $\frac{x+2-6\frac{2}{5}}{2(x+2)}$ darbo dalį. Sudarome lygtį:

$$\frac{x-6\frac{2}{3}}{2x}+\frac{x+2-6\frac{2}{5}}{2(x+2)}=0{,}4.$$

Jos sprendiniai: $x_1=10$, $x_2=-\frac{10}{9}$. Vadinasi, antrasis darbininkas iki pietų dirbo $10\text{ h}-6\frac{2}{3}=3\text{ h }20\text{ min}$, todėl darbą pradėjo 8 h 40 min, o pirmasis – 6 h 24 min.

Ats.: pirmasis 6 h 24 min, antrasis 8 h 40 min.

7. Sakykime, turnyre dalyvavo x dešimtokų (x – natūralusis skaičius). Abu devintokai tarpusavyje žaidė vieną partiją ir gavo 1 tašką. Kitus 7 taškus jie gavo iš dešimtokų. Su dešimtokais jie sužaidė $2x$ partijų. Sužaidus šias partijas, dešimtokai gavo $2x-7$ taškus. Dešimtokai dar gavo $\frac{x(x-1)}{2}$ taškų, žaisdami tarpusavyje. Vadinasi, dešimtokai iš viso surinko $2x-7+\frac{x(x-1)}{2}=\frac{x^2+3x-14}{2}$ taškų.

Sakykime, kiekvienas dešimtokas surinko po $\frac{y}{2}$ taškų (y – natūralusis skaičius). Tuomet sudarome lygtį:

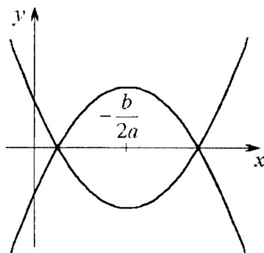
$$\frac{x^2+3x-14}{2}=\frac{y}{2}\cdot x.$$

Iš čia $x^2+3x-14=yx$ arba $x+3-\frac{14}{x}=y$. Skaičius $\frac{14}{x}$ yra

natūralusis, kai $x = 7$ arba $x = 14$.

Ats.: Turnyre dalyvavo 7 arba 14 dešimtokų.

8. Kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c$ šaknys yra teigiamos, kai



2 pav.

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > 0, \\ a \cdot f(0) > 0. \end{cases}$$

Nagrinėjamu atveju gauname nelygybių sistemą

$$\begin{cases} 1-(1+k)(k-2) \geq 0, \\ \dfrac{1}{1+k} > 0, \\ (1+k)(k-2) > 0, \end{cases} \quad \text{t.y.} \quad \begin{cases} k^2 - k - 3 \leq 0, \\ 1+k > 0, \\ (k+1)(k-2) > 0. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą, gauname: $k \in \left(2; \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$.

Ats.: $k \in \left(2; \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$.

9. Kvadratinio trinario $f(x) = ax^2 + bx + c$ šaknys yra tarp 0 ir 4, kai:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ 0 < -\dfrac{b}{2a} < 4, \\ a\ f(0) > 0, \\ a\ f(4) > 0, \end{cases} \quad \text{t.y.} \quad \begin{cases} 15m + 38 \geq 0, \\ 0 < \dfrac{3m+10}{m+2} < 4, \\ 3(m+2)(3m+4) > 0, \\ (m+2)[16(m+2) - 8(3m+10) + 3(3m+4)] > 0. \end{cases}$$

Išsprendę šią nelygybių sistemą, gauname $m > 36$. Taigi, kai $m \in (36; +\infty)$, kvadratinės lygties

$$(m+2)x^2 - 2(3m+10)x + 3(3m+4) = 0$$

šaknys yra tarp 0 ir 4.

Ats.: $m \in (36; +\infty)$.

Pastaba. Priimtinas ir atsakymas $m \in [36;+\infty)$. Šiuo atveju viena šaknis lygi 4.

10. Kvadratinis trinaris $x^2 - 2ax + 2a^2 - 4a + 3 = 0$ neturi sprendinių, kai $D = a^2 - (2a^2 - 4a + 3) = \quad = -(a^2 + 4a + 3) < 0$, t.y., kai $a \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Kvadratinio trinario $f(x) = ax^2 + bx + c$ sprendinių x_1, x_2 bei skaičių 0 ir 2 galimi išsidėstymo variantai tokie:

1) $x_1 \le x_2 < 0$;

2) $x_1 \le 0 < x_2 \le 2$;

3) $x_1 < 0 < 2 < x_2$;

4) $0 < x_1 \le x_2 < 2$;

5) $0 < x_1 \le 2 \le x_2$;

6) $2 < x_1 \le x_2$.

Šie atvejai nusakomi atitinkamai sąlygomis:

1) $\begin{cases} D \ge 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < 0, \\ a\,f(0) > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a\,f(0) \le 0, \\ a\,f(2) \ge 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a\,f(0) < 0, \\ a\,f(2) < 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} D \ge 0, \\ 0 < -\dfrac{b}{2a} < 2, \\ a\,f(0) > 0, \\ a\,f(2) > 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} a\,f(0) \ge 0, \\ a\,f(2) < 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} D \ge 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > 2, \\ a\,f(2) > 0. \end{cases}$

Išnagrinėkime kiekvieną atvejį atskirai.

1) Šiuo atveju teks išspręsti šitokią nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} -(a^2-4a+3)\ge 0, \\ a<0, \\ 2a^2-4a+3>0. \end{cases}$$

Ji sprendinių neturi.
Sprendinių taip pat neturi 2) ir 3) sistemos.
4) Šiuo atveju turime:

$$\begin{cases} a^2-4a+3\le 0, \\ 0<a<2, \\ 2a^2-4a+3>0, \\ a\,f(2)>0. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą gauname $a\in\left[1;\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}\right)$.

Kai $a=1$, turime $0<x_1=x_2<2$, kai $a\in\left(1;\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}\right)$, tai $0<x_1<x_2<2$.

5) Sprendžiame nelygybių sistemą

$$\begin{cases} 2a^2-4a+3\ge 0, \\ 2a^2-8a+7\le 0. \end{cases}$$

Jos sprendinių aibė – $\left[\dfrac{4-\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{4+\sqrt{2}}{2}\right]$. Kai $a=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$, turime $0<x_1<2\le x_2$. Kai $a\in\left(\dfrac{4-\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{4+\sqrt{2}}{2}\right)$, tai $0<x_1\le 2<x_2$.

6) Išsprendę nelygybių sistemą

$$\begin{cases} a^2-4a+3\le 0, \\ a<2, \\ 2a^2-4a+3>0, \end{cases}$$

gauname:

$$a \in \left(\frac{4+\sqrt{2}}{2};\ 3 \right].$$

Kai $a \in \left(\frac{4+\sqrt{2}}{2};\ 3 \right)$, turime $2 < x_1 < x_2$, o kai $a = 3$, $2 < x_1 = x_2$.

Ats.: Kai $a \in (-\infty;\ 1) \cup (3;\ +\infty)$, lygtis sprendinių neturi; kai $a = 1$, tai $0 < x_1 = x_2 < 2$; kai $1 < a < \frac{4-\sqrt{2}}{2}$, tai $0 < x_1 < x_2 < 2$; kai $a = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$, tai $0 < x_1 < 2 \le x_2$; kai $a \in \left(\frac{4-\sqrt{2}}{2};\ \frac{4+\sqrt{2}}{2} \right)$, tai $0 < x_1 < 2 < x_2$; kai $a = \frac{4+\sqrt{2}}{2}$, tai $0 < x_1 = 2 < x_2$; kai $a \in \left(\frac{4+\sqrt{2}}{2};\ 3 \right)$, tai $2 < x_1 < x_2$; kai $a = 3$, tai $2 < x_1 = x_2$.

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Kadangi

$$u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1,$$

tai

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1. \qquad (1)$$

Iš pastarosios formulės, vietoje n įstatę $n+1$, gauname

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2n + 3. \qquad (2)$$

Dabar iš (2) lygybės atėmę (1), turėsime

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 2 \quad \text{arba} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2.$$

Dar kartą dabar jau paskutiniojoje lygybėje vietoj n įstatykime $n+1$. Gausime

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2.$$

Iš dviejų paskutiniųjų lygybių išplaukia, kad

$$u_{n+3} - u_{n+2} = 2u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n \quad \text{arba}$$

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n.$$

Taigi natūraliųjų skaičių kvadratų seka yra 3-iosios eilės rekurenčioji seka.

2. Tegu progresijos vardiklis yra lygus q, o pirmasis narys b. Tuomet

$$\begin{cases} S = \dfrac{b}{1-q} = 12, \\ b + bq + bq^2 = 10{,}5. \end{cases}$$

Antrąją lygčių sistemos lygybę padalinę iš pirmosios gausime

$$(1-q)(1+q+q^2) = \frac{10{,}5}{12} = \frac{7}{8} \quad \text{arba} \quad 1 - q^3 = \frac{7}{8}, \quad q^3 = \frac{1}{8}, \quad q = \frac{1}{2}.$$

Iš pirmosios lygties surandame $b = 6$.

Ats.: $b = 6$, $q = \dfrac{1}{2}$.

3. Tegu trikampio kraštinių ilgiai užrašyti didėjimo tvarka yra lygūs

$$b, \ bq, \ bq^2 \quad (q > 1).$$

Kadangi bet kurių dviejų trikampio kraštinių ilgių suma yra didesnė

už trečiąją, tai

$$b + bq > bq^2,$$
$$q^2 - q - 1 < 0,$$
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Turėdami galvoje, kad $q > 1$, galutinai gauname q įvertinimą:

$$1 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Kadangi $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$, tai $q < 2$.

Ats.: Negali.

4. Visi triženkliai skaičiai, besidalijantys iš 7, sudaro aritmetinę progresiją. Jos pirmasis narys $v_1 = 105$, skirtumas $d = 7$, o paskutinysis n-asis narys $v_n = 994$. Todėl

$$S_n = \frac{v_1 + v_n}{2} n = \frac{105 + 994}{2} n.$$

Kadangi $v_n = v_1 + (n-1)d$, tai $994 = 105 + (n-1)7$ ir $n = 128$, o $S_n = 70336$.

Ats.: 70336.

5. Tegu a – taškų skaičius, kuriuos gavo paskutinę vietą užėmusi komanda, o d – progresijos skirtumas. Iš viso komandos sužaidė $C_{12}^2 = 66$ susitikimus. Taigi

$$a + (a+d) + ... + (a + 11d) = 66,$$
$$12a + (1 + 2 + ... + 11)d = 66,$$
$$12a + 66d = 66,$$
$$12a = 66(1-d),$$
$$2a = 11(1-d).$$

Kadangi $a \geq 0$, $d \geq 0$ ir abu sveikieji skaičiai, tai paskutinioji lygybė turi tik vieną tokį sprendinį: $d = 1$, $a = 0$.

Ats.: 0.

6. Tegu skirtingų maršrutų iš 1-osios viršūnės į n-ąją skaičius yra x_n. Maršrutą pradedame 1-ojoje viršūnėje, todėl $x_1 = 1$. Iš pirmosios viršūnės patekti į antrąją galima vieninteliu būdu, taigi ir $x_2 = 1$. Į trečiąją viršūnę galima patekti dviem maršrutais: tiesiai iš pirmosios arba pabuvojant ir antrojoje: $x_3 = 2$. Visus maršrutus, kuriais galima patekti į n-ąją viršūnę, suskirstykime į dvi grupes. Pirmajai grupei priskirkime maršrutus, kai pabuvojama n–1-ojoje viršūnėje, o antrajai, kai į n-ąją viršūnę pakliūvama tiesiai iš n–2-osios viršūnės. Gauname, kad $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$.

Taigi skaičiai x_n yra lygūs Fibonačio skaičiams: $x_n = F_n$.

7. Iš Fibonačio skaičių apibrėžimo turime

$$F_1 = F_2,$$
$$F_3 = F_4 - F_2,$$
$$F_5 = F_6 - F_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}.$$

Sudėję panariui visas šias lygybes gauname reikalingą lygybę:

$$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

8. Tegu sugalvoti skaičiai yra a ir b. Tuomet

a	– 1-oji eilutė
b	– 2-oji eilutė
$a + b$	– 3-ioji eilutė
$a + 2b$	– 4-oji eilutė
....	....
$5a + 8b$	– 7-oji eilutė
....	....
$21a + 34b$	– 10-oji eilutė
$55a + 88b$	– visa suma

Aišku, kad $55a + 88b = 11(5a + 8b)$. Taigi visa suma gali būti gauta 7-ąją eilutę padauginus iš 11.

Ats.: Petras 7-ąją eilutę padaugino iš 11.

9. Kadangi $\dfrac{DC}{AD}=\alpha$, o $AEFD$ – kvadratas, tai ir $\dfrac{DC}{DF}=\alpha$, ir F yra atkarpos DC aukso pjūvio taškas. Taigi ir

$$\frac{DF}{FC}=\alpha,\quad \frac{EF}{FC}=\alpha.$$

Stačiakampis $EFCB$ – auksinės proporcijos stačiakampis. Visiškai analogiškai įrodoma, kad $GHCF$ – irgi auksinės proporcijos stačiakampis.

10. Tegu a – dešimtkampio kraštinė, o R – apibrėžto apskritimo spindulys. Tuomet $a=2R\sin\dfrac{\pi}{10}=2R\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Taigi $\dfrac{R}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=\alpha$.

Čia pasinaudojome tuo, kad $\sin\dfrac{\pi}{10}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Įrodykime tai.

Naudodami trigonometrines formules gauname

$$\cos\frac{\pi}{10}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=\sin\frac{4\pi}{10}=2\sin\frac{2\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}=$$

$$=4\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{10}\right)$$

arba

$$1=4\sin\frac{\pi}{10}\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{10}\right).$$

Pažymėkime $\sin\dfrac{\pi}{10}=x$. Tuomet turėsime lygtį

$$8x^3-4x+1=0.$$

Išskaidę dauginamaisiais gausime $(2x-1)(4x^2+2x-1)=0$,

$$x_1=\frac{1}{2},\quad x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{4},\quad x_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

Kadangi $\sin\dfrac{\pi}{10}$ nelygu $\dfrac{1}{2}$ ir yra teigiamas, tai $\sin\dfrac{\pi}{10}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Dviženklių skaičių nuo 10 iki 99 skaitmenų sumos kinta nuo 1 iki 18. Skaitmenų sumą 1 ir 18 turi atitinkamai tik skaičiai 10 ir 99, o 2 ir 17 – tik du dviženkliai skaičiai 11 ir 20 bei atitinkamai 89 ir 98. Todėl atsiras mažiausiai 29 dviženklių skaičių grupė su skaitmenų suma nuo 3 iki 16 (tai ir būtų tos 14 „dėžių“, į kurias „išdėliotume“ tuos mažiausiai 29 skaičius). Todėl ir atsiras bent trys skaičiai su vienoda skaitmenų suma.

2. Taip, visada. Surikiuokime juos didėjimo tvarka $a_1 \le a_2 \le .. \le a_{88}$ ir nagrinėkime skaičius a_1, $a_1 + a_2$, ... , $a_1 + a_2 + ... + a_{88}$. Jeigu kuris nors iš tų „naujųjų“ 88 skaičių dalijasi iš 88, tai uždavinys baigtas. Jei nė vienas iš jų nesidalija iš 88, tai kurių nors dviejų tų skaičių liekanos dalijant iš 88 (nes liekanų tėra 87), yra vienodos. Tuomet jų skirtumas, kuris pats yra kelių paeiliui einančių pradinių skaičių suma, dalijasi iš 88.

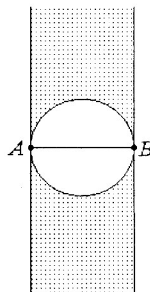
3. Jeigu turime iškilųjį penkiakampį plokštumoje, kurio viršūnių koordinatės yra sveikieji skaičiai, tai to penkiakampio viršūnių arba abi koordinatės lyginės, arba abi nelyginės, arba pirmoji lyginė, o antroji nelyginė arba, atvirkščiai, pirmoji nelyginė, o antroji lyginė. Kadangi viršūnių yra 5, tai atsiras dvi „vienodo lyginumo“ viršūnės $(a;\ b)$ ir $(c;\ d)$. Šiuos taškus jungiančios atkarpos vidurio taško koordinatės $\left(\frac{a+c}{2};\frac{b+d}{2}\right)$ yra sveikieji skaičiai, o pats tas taškas dėl penkiakampio iškilumo tikrai rasis tame penkiakampyje.

4. Jeigu ant abiejų 99 kortelių pusių užrašytųjų skaitmenų skirtumų sandauga būtų nelyginė, tai ir patys tie skirtumai būtų nelyginiai skaičiai arba, kitaip sakant, kiekvieną kartą būtų atiminėjami skirtingų „lyginumų“ skaičiai. Kadangi buvo imami visi skaičiai nuo 1 iki 99, o tarp jų yra 50 nelyginių ir 49 lyginiai skaičiai, tai bent vienos kortelės abiejose pusėse esantieji skaičiai abu yra nelyginiai, todėl jų skirtumas, o tuo pačiu ir visa sandauga, bus lyginis skaičius.

5. Apie atkarpą AB, kaip apie skersmenį apibrėžkime apskritimą, o per taškus A ir B, kaip to skersmens galus, nubrėžkime apskritimo liestines (*žr.* 1 pav.).

Ieškomoji sritis, arba galima viršūnės C pasirinkimo sritis, yra sudaryta iš visų taškų, esančių toje tarp tų liestinių esančios juostos viduje, kuri priklauso apibrėžtojo apskritimo išorei.

Tikrai, jeigu tašką C pasirinktume kairiau per tašką A išvestosios liestinės, tai trikampio ABC kampas A būtų bukas, jeigu dešiniau liestinės per B, tai bukas būtų kampas B. Jei tašką C pasirinktume apskritimo viduje, tai bukas būtų kampas C. (Jei C imtume ant srities kontūro, tai vienas kuris iš tų kampų būtų status).



1 pav.

6. Tai 1997 metų Tarptautinio „Kengūros" matematinio konkurso uždavinys (nuo 1999 metų šis konkursas vyksta jau ir lietuviškose mokyklose).

Jeigu tiesė yra vienodai nutolusi nuo trijų taškų, tai arba ji „atskiria" vieną tašką nuo likusiųjų 2, arba visi taškai yra toje pačioje tiesės pusėje. Jeigu visi taškai yra vienoje tiesės pusėje, tai, būdami vienodai nutolę nuo tos tiesės, jie atsidurtų vienoje tiesėje.

Jeigu gi tiesė „atskiria" vieną tašką (pvz., A) nuo likusiųjų dviejų (pvz.: B ir C), tai toji tiesė yra trikampio ABC vidurio linija (lygiagreti BC).

Taigi toji tiesė yra viena iš trijų trikampio ABC vidurio linijų.

7. Šis uždavinys šiek tiek bendresne forma

$$*1 * 2 * 3 * \ldots * n = n+1$$

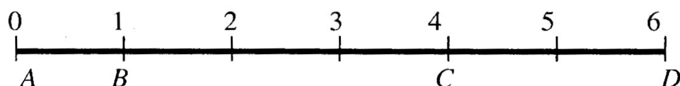
yra pasitaikęs Lietuvos komandinėje matematikų olimpiadoje (ateinantį rudenį vyks jau 14-oji tokia apžiūra, prie kurios nuo šių metų bus prišlieta ir „įprastinė" penktų–septintų klasių moksleivių olimpiada).

Galima, pavyzdžiui,

$$-1+2+(3-4-5+6)+(7-8-9+10)+\ldots$$
$$+ (1995-1996-1997+1998)+1999 = 2000.$$

(Panagrinėkite ir komandinės olimpiados uždavinį!)

8. Taip, taip gali būti. Pavyzdys pateikiamas brėžiniu („liniuotės" dalimi)



9. Tikriname indukcijos „bazę". Jei $n=1$, tai $2^6+18-1=81$ dalijasi iš 81.

Tarkime, jog k yra toks, kad $2^{6n}+18n-1$ dalijasi iš 81. Reikia įrodyti, kad ir pakeitus n $n+1$, dalumas iš 81 išliks.

Tačiau $2^{6(n+1)}+18(n+1)-1$ dalinsis be liekanos iš 81, jeigu iš to skaičiaus dalinsis jų skirtumas

$$(2^{6(n+1)}+18(n+1)-1)-$$

$$(2^{6n}+18n-1)=2^{6n}\cdot 63+18=(2^{6n}-1)\cdot 63+81.$$

Dabar pakanka įrodyti, kad $2^{6n}-1$ dalijasi iš 9. Tačiau

$$2^{6n}-1=(64-1)(64^{n-1}+64^{n-2}+...+64+1)$$

dalijasi iš 64 – 1 = 63, taigi ir iš 9.

10. Paimkime ir padalykime visus tuos 46 skaičius iš 88. Jeigu bent dvi kurios nors liekanos sutampa, tai tų skaičių skirtumas dalijasi iš 88.

Jeigu visos liekanos yra skirtingos, tai sugrupuokime visas įmanomas liekanas taip

(1 su 87), (2 su 86), ..., (43 su 45)

ir atskirai parašykime liekanas 0 ir 44. Turime 45 atvejus („dėžes") ir 46 galimas liekanas. Todėl į kurią nors vieną „dėžę" paklius dvi liekanos ir tada jų suma bus 88, o tai reiškia jog atitinkamų dviejų skaičių suma dalijasi iš 88.

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Sąlygoje nurodytas reiškinys turi prasmę, kai išpildytos šios sąlygos:

$$\begin{cases} 6-\left|x^2-10\right| \geq 0, \\ 3-x \geq 0. \end{cases}$$

Spręsdami sistemos pirmąją nelygybę, gauname:

$$|x^2-10| \leq 6, \quad 4 \leq x^2 \leq 16, \quad x \in [-4; -2] \cup [2; 4].$$

Kadangi iš antrosios sistemos nelygybės išplaukia, kad $x \leq 3$, gauname

$$D(f) = [-4; -2] \cup [2; 3].$$

Ats.: $D(f) = [-4; -2] \cup [2; 3]$.

2. Pirmiausia pastebėkime, kad ši funkcija apibrėžta visoje realiųjų skaičių tiesėje. Todėl visoje tiesėje apibrėžtos ir funkcijos f_2, f_3 ir t.t. Rasime funkcijos f_2 išraišką:

$$f_2(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

Panašiai galime rasti ir f_3:

$$f_3(x) = f(f(f(x))) = f(f_2(x)) =$$

$$= \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+(f_2(x))^2}} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+2x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}.$$

Nesunku pastebėti dėsningumą, pagal kurį turėtų būti

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}. \qquad (*)$$

Šios formulės teisingumą su bet kuriuo natūraliuoju n nesunku įrodyti matematinės indukcijos metodu (šis metodas jaunųjų matematikų mokyklos mokiniams pažįstamas iš antrosios užduoties).

Įrodymas. Kad (*) formulė teisinga su $n = 1$ akivaizdu, nes $f_1(x) = f(x)$.

Sakykime, kad ši formulė teisinga su $n = k$:

$$f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}.$$

Tačiau

$$f_{k+1}(x) = f(f_k(x)) = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$

todėl formulė (*) teisinga ir su $n = k+1$. Tuo formulės (*) teisingumas galutinai įrodytas.

3. Pažymėkime $\dfrac{x}{x+1} = t$. Tada $x = t(x+1)$, $(1-t)x = t$, $x = \dfrac{t}{1-t}$.

Todėl $f(t) = \left(\dfrac{t}{1-t}\right)^2$.

Ats.: $f(x) = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2$.

4. Lengva įsitikinti, kad $D(f) = \mathrm{R}$. Taigi funkcijos apibrėžimo sritis simetriška koordinačių pradžios taško atžvilgiu. Be to,

$$f(-x) = \lg\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right) = \lg\frac{\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \lg\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-1} = -\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = -f(x).$$

Vadinasi, funkcija f – nelyginė.

5. Iš funkcijos f išraiškos matyti, kad ji apibrėžta, kai $x \neq 0$. Be to,

$$f(-x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\sqrt{-x}}, \text{kai} -x>0,\\ g(-x), \text{ kai} -x<0,\end{cases} \quad \text{t.y.} \quad f(-x)=\begin{cases}g(-x), \text{ kai} x>0,\\ 1-\dfrac{1}{\sqrt{-x}}, \text{kai} x<0.\end{cases}$$

Funkcijos f nelygiškumo sąlyga $f(x)=-f(-x)$ bus patenkinta, kai

$$g(x)=-\left(1-\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)=-1+\frac{1}{\sqrt{-x}}$$

su neigiamomis x reikšmėmis. Todėl

$$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}, \text{kai} x>0,\\ -1+\dfrac{1}{\sqrt{-x}}, \text{kai} x<0.\end{cases}$$

Spręsdami lygtį $f(x)=\frac{1}{2}$, turime rasti teigiamus lygties

$$1-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

ir neigiamus lygties

$$-1+\frac{1}{\sqrt{-x}}=\frac{1}{2}$$

sprendinius. Nesunkiai rasime $x_1=4$ ir $x_2=-\frac{4}{9}$.

Ats.: $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}, \text{kai} x>0,\\ -1+\dfrac{1}{\sqrt{-x}}, \text{kai} x<0;\end{cases}$ $x_1=4$, $x_2=-\frac{4}{9}$.

6. $D(g)=[0;+\infty)$, todėl ir $f(g(x))=\sin\left(\sqrt{x}\right)^2$ apibrėžta tik su neneigiamais argumentais. Tokia funkcija periodine būti negali.

Ats.: Neperiodinė.

7. Funkcijos, turinčios periodą 8π, turi tenkinti sąlygą

$$\frac{\sin nx}{\sin\frac{x}{n}} = \frac{\sin n(x+8\pi)}{\sin\frac{x+8\pi}{n}}.$$

Iš čia gauname: $\dfrac{\sin nx}{\sin\frac{x}{n}} = \dfrac{\sin nx}{\sin\frac{x+8\pi}{n}}$.

Ši lygybė bus teisinga su visais $x \in D(f_n)$, kai

$$\sin\frac{x}{n} - \sin\frac{x+8\pi}{n} = 0, \qquad 2\sin\left(\frac{-4\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{x+4\pi}{n}\right) = 0.$$

Ši lygybė teisinga su visais $x \in D(f_n)$, kai $\sin\frac{4\pi}{n} = 0$. Iš čia gauname $n = 1,2,4$.

Ats.: Periodą 8π turi funkcijos f_1, f_2, f_4.

8. Pakanka pastebėti, kad funkcija $f_1(x) = \sin x$ turi periodą 2π, o $f_2(x) = \sin \pi x$ – periodą 2. Skaičius π, kaip žinoma, yra iracionalus. Todėl šie periodai nėra bendramačiai ir funkcija f nėra periodinė.

9. Laikydami, kad ši lygybė teisinga su visais $x \neq 0$, pakeisime joje x į $\frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+1\right)f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 2.$$

Padauginę šios lygybės abi puses iš x^2 ir prijungę duotąją lygtį, gauname tiesinių lygčių sistemą $f(x)$ ir $f\left(\frac{1}{x}\right)$ atžvilgiu:

$$\begin{cases} xf(x) + \frac{1}{2}(x+1)f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + x + 2, \\ \frac{x}{2}(x+1)f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = 2x^2 + x + 1. \end{cases}$$

Pirmąją lygtį daugindami iš x, o antrąją iš $\frac{1}{2}(x+1)$, po to lygtis atimdami vieną iš kitos, randame

$$f(x)=\frac{x(x^2+x+2)-\frac{1}{2}(x+1)(2x^2+x+1)}{x^2-\frac{x}{4}(x+1)^2}.$$

Suprastinę, gauname $f(x)=\frac{2}{x}$.

Lengva įsitikinti, kad ši funkcija tikrai tenkina duotąją lygtį.

Ats.: $f(x)=\frac{2}{x}$.

10. Panaudodami duotąją lygtį, rasime

$$f(x+2a)=f((x+a)+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-(f(x+a))^2}=$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}-\frac{1}{4}-\sqrt{f(x)-(f(x))^2}-f(x)+(f(x))^2}=$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{(f(x))^2-f(x)+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}+\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|.$$

Iš funkcinės lygties matyti, kad $f(x)\geq\frac{1}{2}$, todėl

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+f(x)-\frac{1}{2}=f(x).$$

Matome, kad skaičius $2a$ yra funkcijos f periodas.

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Skaičius, kuris baigiasi n nulių, dalijasi iš 10^n, t. y. iš $2^n \cdot 5^n$. Didžiausias skaičiaus 2 laipsnio rodiklis, iš kurio dalijasi 600!, lygus

$$\left[\frac{600}{2}\right]+\left[\frac{600}{2^2}\right]+\left[\frac{600}{2^3}\right]+\left[\frac{600}{2^4}\right]+\left[\frac{600}{2^5}\right]+$$

$$+\left[\frac{600}{2^6}\right]+\left[\frac{600}{2^7}\right]+\left[\frac{600}{2^8}\right]+\left[\frac{600}{2^9}\right]=$$

$$=300+150+75+37+18+9+4+2+1=596.$$

Didžiausias skaičiaus 5 laipsnio rodiklis, iš kurio dalijasi 600!, lygus

$$\left[\frac{600}{5}\right]+\left[\frac{600}{5^2}\right]+\left[\frac{600}{5^3}\right]=120+24+4=148.$$

Taigi 600! dalijasi iš $2^{596} \cdot 5^{148} = 10^{148} \cdot 2^{448}$
Vadinasi, 600! baigiasi 148 nuliais.

2. Tarkime, kad $f(x)$ yra periodinė funkcija ir jos periodas yra $T \neq 0$.

a) Tuomet

$$\{x+T\}+\cos 2(x+T)=\{x\}+\cos 2x.$$

Kai $x = 0$, gauname lygybę

$$\{T\}+\cos 2T = 1,$$

kai $x = -T$, lygybę

$$\{-T\}+\cos 2T = 1.$$

Atėmę šias lygybes, gauname $\{T\}-\{-T\}=0$, t. y. $\{T\}=\{-T\}$. Bet taip būna tik tada, kai $T=\frac{k}{2}$, $k \in Z$. Tuomet iš lygybės $\{T\}+\cos 2T = 1$, išplaukia $\cos k = 1$ arba $\cos k = \frac{1}{2}$. Pirmuoju atveju $k = 2n\pi$, $n \in Z$, o antruoju $k = \pm\frac{\pi}{3}+2m\pi$, $m \in Z$. Matome, jog funkcija neperiodinė.

b) $\{x+T\}+\sin\pi(x+T)=\{x\}+\sin\pi x$, (1)

$$\begin{array}{l} \{T\}+\sin\pi T=0, \\ \underline{\{-T\}-\sin\pi T=0} \\ \{T\}+\{-T\}=0. \end{array}$$

Vadinasi, T – sveikasis skaičius. Tuomet $\sin\pi T=0$, $\pi T=\pi k$, $k\in Z$. Taigi $T=k\in Z$.

Įrašę $T=k$ į (1) lygybę, gauname

$$\{x+k\}+\sin\pi(x+k)=\{x\}+\sin\pi x.$$

Kadangi $\{x+k\}=\{x\}$, kai $k\in Z$, tai

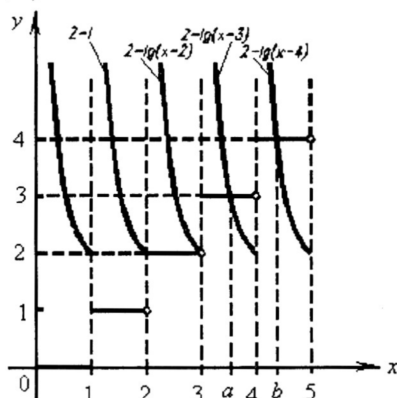
$$\sin\pi(x+k)=\sin\pi x,$$

$$\sin\pi x\cos\pi k+\sin\pi k\cos\pi x=\sin\pi x,$$

$$\sin\pi x\cos\pi k=\sin\pi x.$$

Ši lygybė teisinga, kai $k=2m$, $m\in Z$. Vadinasi, funkcija yra periodinė ir jos periodas $k=2m$, $m\in Z$.

4. Nelygybę išspręsime grafiškai, nubraižę funkcijų $[x]$ ir $2-\lg\{x\}$ grafikus (*žr.* 1 pav.). Nelygybės $[x]>2-\lg\{x\}$ sprendiniai bus intervalai $[a, 4)$, $[b, 5)$ ir t.t.



1 pav.

Tašką a gausime, išsprendę lygtį $2-\lg(x-3)=3$, tašką b – lygtį $2-\lg(x-4)=4$ ir t.t. Bendru atveju reikia išspręsti lygtį $2-\lg(x-n)=n$; čia $n\in N, \quad n\geq 3$.
Vadinasi, duotosios nelygybės sprendiniai yra intervalai $(n+10^{2-n}; n+1)$, $n\in N, \quad n\geq 3$.

5. $A<\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{9}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{8}}}}=3+2=5$.
Kita vertus,

$$A>\sqrt{6}+\sqrt[3]{6}>4.$$

Vadinasi, $[A]=4$.

6. Pažymėkime $x=k+\alpha$; čia $k\in Z, \quad 0\leq\alpha<1$. Tuomet duotoji lygtis tampa lygtimi

$$2k+\left[\alpha+\frac{3}{8}\right]=\frac{7k+7\alpha-2}{3},$$

$$3\left[\alpha+\frac{3}{8}\right]=k+7\alpha-2.$$

Kai $\alpha<\frac{5}{8}$, gauname lygybę $k=2-7\alpha$; iš čia $-\frac{19}{8}\leq k\leq 2$. Ši nelygybė turi 5 sveikuosius sprendinius, kurių kiekvieną atitinka vienintelė α reikšmė $\alpha=\frac{2-k}{7}$ ir vienintelė x reikšmė. Kai $1>\alpha\geq\frac{5}{8}$, gauname dar du sprendinius.

Ats.: 7 sprendinius.

7. Lygtį pertvarkome į lygtį

$$([x]-\{x\})\left(1-\frac{1}{[x]\{x\}}\right)=0.$$

Lygybė $[x]-\{x\}=0$ teisinga tik tada, kai $x=0$. Bet tuomet $[x]=0$, $\{x\}=0$ ir lygtis neturi prasmės. Vadinasi, $[x]-\{x\}\neq 0$, ir duotoji lygtis ekvivalenti lygčiai $[x]\{x\}=1$. Jos sprendiniai yra $n+\frac{1}{n}$, $n\in N$, $n\geq 2$.

8. Kadangi $|x|\geq x\geq [x]$, tai $\left||x|-[x]\right|=|x|-[x]$. Kadangi $[x]$ – sveikasis skaičius, tai

$$[|x|-[x]]=[|x|]-[x].$$

Taigi gauname lygtį

$$|x|-[x]=[|x|]-[x],$$

$$|x|=[|x|].$$

Šiai lygčiai tinka tik tokie x, kurių $|x|$ – sveikasis skaičius, taigi pats x – irgi sveikasis skaičius.

9. Pagal sąlygą $a_1=\sqrt{1999}$ ir $a_{n+1}=\sqrt{1999+a_n}$ iš čia $a_{n+1}^2=a_n+1999$. Aišku, kad $44<a_1<45$, tuomet $2043<a_2^2<2044$, t. y. $45<a_2<46$, ir apskritai, jei $45<a_k<46$, tai $2044<a_{k+1}^2<2045$; iš čia $45<a_{k+1}<46$.
Vadinasi

$$[a_n]=\begin{cases}44, & \text{kai } n=1,\\ 45, & \text{kai } n>1.\end{cases}$$

10. Pasinaudokime nelygybe

$$a+b<\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}\quad (a\neq b).$$

Tuomet

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+2}<\sqrt{2(n+n+2)}=2\sqrt{n+1}$$

ir

$$\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)^2 < 9n+9.$$

Įrodysime, kad

$$\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)^2 > 9n+8,$$

t. y.

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2} > \sqrt{9n+8}. \qquad (1)$$

Kairėje pusėje esančiai sumai pritaikysime Koši nelygybę

$$a+b+c > 3\sqrt[3]{abc}$$

ir gausime, kad

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2} > 3\sqrt[6]{n(n+1)(n+2)}.$$

(1) nelygybė bus teisinga, jeigu

$$3\sqrt[6]{n(n+1)(n+2)} > \sqrt{9n+8}.$$

Pastaroji nelygybė ekvivalenti nelygybei

$$243n^2-270n-512>0.$$

Ši nelygybė savaime teisinga, kai $n \geq 3$. Kai $n=1$, $n=2$, tai reikiama nelygybė išplaukia iš įverčių

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3} > 1+1{,}41+1{,}73 = 4\sqrt{14} > \sqrt{17},$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4} > 1{,}4+1{,}7+2 = 5{,}1 > \sqrt{26}.$$

Vadinasi,

$$\left[\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)^2\right] = 9n+8.$$

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tegu k_3 yra triženklių skaičių, kurių skaitmenys yra lyginiai ir skirtingi, kiekis, k_4 – tokių keturženklių skaičių kiekis, o k_5 – tokių penkiaženklių skaičių kiekis.

Pagal kombinatorinę sudėties taisyklę iš viso turime $k_3 + k_4 + k_5$ skaičių, kurių skaitmenys yra lyginiai ir skirtingi.

Pasinaudoję kombinatorine daugybos taisykle, gauname, jog $k_3 = 4 \cdot 4 \cdot 3$, nes triženklio skaičiaus $\overline{abc}$ skaitmenys yra šitokių aibių elementai:

$a \in \{2,4,6,8\}$, $b \in \{0,2,4,6,8\} \setminus \{a\}$, $c \in \{0,2,4,6,8\} \setminus \{a,b\}$.

Analogiškai $k_4 = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$, $k_5 = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Todėl mus dominančių natūraliųjų skaičių yra

$4 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 240$.

2. a) Kadangi lietuviškų saldainių yra 7 dėžutės, latviškų – 6, vokiškų – 7, tai pagal kombinatorinę sudėties taisyklę pasirinkimo variantų skaičius m_1 yra: $m_1 = 7 + 4 + 6 = 17$.

b) Dviejų skirtingų dėžučių pasirinkimo variantų skaičius m_2 lygus derinių iš 17 elementų po 2 elementus skaičiui:

$$m_2 = C_{17}^2 = \frac{17 \cdot 16}{2} = 136.$$

c) Dvi dėžutės skirtingų šalių saldainių tai „dėžutė lietuviškų *ir* dėžutė latviškų“ *arba* „dėžutė lietuviškų *ir* dėžutė vokiškų“ *arba* „dėžutė latviškų *ir* dėžutė vokiškų“. Pagal kombinatorinę sudėties taisyklę pasirinkimo variantų skaičius m_3 yra:

$$m_3 = m_{12} + m_{13} + m_{23}.$$

Pagal kombinatorinę daugybos taisyklę $m_{12} = 7 \cdot 6$, $m_{13} = 7 \cdot 4$, $m_{23} = 6 \cdot 4$.

Taigi $m_3 = 42 + 28 + 24 = 94$.

d) Trijų skirtingų dėžučių pasirinkimo variantų skaičius m_4 lygus derinių iš 17 elementų po 3 elementus skaičiui:

$$m_4 = C_{17}^3 = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 680.$$

e) Tris dėžutes skirtingų šalių saldainių galime pasirinkti $m_5 = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$ būdais. Tai išplaukia iš kombinatorinės daugybos taisyklės, nes lietuviškų saldainių dėžutę galima pasirinkti 7 būdais, latviškų – 6 būdais, o vokiškų – 4 būdais.

3. Įvykis, jog kortelė „nelaiminga“, reiškia, kad „neteisingai nurodyti 6 skaičiai“ *arba* „neteisingai nurodyti 5 skaičiai ir 1 teisingai“, *arba* „neteisingai nurodyti 4 skaičiai ir 2 teisingai“.

Neteisingai nurodyti 6 skaičius galima $n_{60} = C_{24}^6$ būdais, t.y.

$$n_{60} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 134596\,.$$

Neteisingai nurodyti 5 skaičius, o 1 – teisingai galima $n_{51} = C_{24}^5 \cdot C_6^1$ būdais, t.y.

$$n_{51} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 6 = 255024\,.$$

Neteisingai nurodyti 4 skaičius, o 2 – teisingai galima $n_{42} = C_{24}^4 \cdot C_6^2$ būdais, t.y.

$$n_{42} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 159390\,.$$

Pagal kombinatorinę sudėties taisyklę gausime „nelaimingų“ šešetų skaičių n:

$$n = n_{60} + n_{51} + n_{42} = 134596 + 255024 + 159390 = 549010\,.$$

4. $C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 = 2^5 - 2 = 30$, nes pagal Niutono binomo formulę $2^5 = (1+1)^5 = 1 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + 1$.

5. Pažymėkime s_i – i-ąjį kartą ištraukta standartinė detalė, b_i – i-ąjį kartą ištraukta brokuota detalė; $i = 1,2,3$. Gauname elementariųjų įvykių aibę

$$E = \{s_1 s_2 s_3,\ s_1 s_2 b_3,\ s_1 b_2 s_3,\ b_1 s_2 s_3,\ s_1 b_2 b_3,\ b_1 s_2 b_3,\ b_1 b_2 s_3,\ b_1 b_2 b_3\}\,.$$

Elementariųjų įvykių tikimybes apskaičiuojame naudodamiesi nepriklausomų įvykių sandaugos tikimybės formule:

$$P(s_1s_2s_3)=\frac{9}{12}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{9}{12}=\frac{27}{64},$$

$$P(s_1s_2b_3)=P(s_1b_2s_3)=P(b_1s_2s_3)=\frac{9}{12}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{3}{12}=\frac{9}{64},$$

$$P(s_1b_2b_3)=P(b_1s_2b_3)=P(b_1b_2s_3)=\frac{3}{12}\cdot\frac{3}{12}\cdot\frac{9}{12}=\frac{3}{64},$$

$$P(b_1b_2b_3)=\frac{3}{12}\cdot\frac{3}{12}\cdot\frac{3}{12}=\frac{1}{64}.$$

6. Įvykių A ir B tikimybes apskaičiuojame naudodami klasikinės tikimybės formulę.

Tris berniukus iš penkiolikos galima atrinkti $n=C_{15}^3=455$ būdais. Įvykį A sudarančių elementariųjų įvykių skaičius $m_A=13$, nes Petrui ir Jonui patekus tarp atrinktųjų, trečiuoju gali būti bet kuris iš likusiųjų trylikos berniukų. Todėl $P(A)=\frac{13}{455}=\frac{1}{35}$.

Įvykį B sudarančių elementariųjų įvykių skaičius $m_B=C_{13}^3=286$ (trys berniukai atrenkami iš trylikos). Taigi $P(B)=\frac{286}{455}=\frac{22}{35}$.

Pažymėkime T – įvykį, jog Petras yra tarp atrinktųjų, o J – įvykį, jog Jonas yra tarp atrinktųjų. Tuomet $C=T\cup J$ ir pagal įvykių sumos tikimybės formulę gauname

$$P(C)=P(T\cup J)=P(T)+P(J)-P(T\cap J).$$

Kadangi $P(T)=P(J)=\frac{C_{14}^2}{C_{15}^3}=\frac{14\cdot13\cdot3}{15\cdot14\cdot13}=\frac{1}{5}$,

$P(T\cap J)=P(A)=\frac{1}{35}$, turėsime: $P(C)=\frac{7}{35}+\frac{7}{35}-\frac{1}{35}=\frac{13}{35}$.

7. Septynių šokoladukų rinkinių iš keturių pavadinimų šokoladukų tiek pat kiek yra kartotinių derinių po 7 elementus iš 4 rūšių elementų, t.y. $\overline{C}_4^7=C_{7+3}^7=C_{10}^3=\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}=120$.

Kadangi pirkėjas pasirenka 7 šokoladukus atsitiktinai, tai eksperimentas klasikinis ir elementariųjų įvykių skaičius yra $n = 120$, o $m_A = 1$, nes septynių „Veliuonos" šokoladukų rinkinys vienintelis. Taigi

$$P(A) = \frac{1}{120}.$$

Toliau $m_B = \overline{C}_3^5 = C_7^5 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$, nes, kai 2 šokoladukai „Neris", tai likusius 5 tenka paimti iš 3 rūšių. Todėl

$$P(B) = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}.$$

Panašiai

$$m_C = \overline{C}_2^4 = C_5^4 = 5 \quad \text{ir} \quad P(C) = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}.$$

Įvykis „tarp 7 šokoladukų yra nemažiau kaip 4 šokoladukai „Lazdynai" " tai *„tarp 7 yra 4 „Lazdynai" ir 3 iš trijų rūšių"*, arba *„tarp 7 yra 5 „Lazdynai" ir 2 iš 3 rūšių*, arba *6 „Lazdynai" ir 1 iš 3 rūšių"*, arba *„7 „Lazdynai" "*. Taigi

$$m_D = \overline{C}_3^3 + \overline{C}_3^2 + \overline{C}_3^1 + 1 = C_5^3 + C_4^2 + C_3^1 + 1 = 10 + 6 + 3 + 1 = 20$$

ir

$$P(D) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

8. Pažymėkime b_i – i-ąjį kartą traukiant ištrauktas baltas rutulys, j_k – k-ąjį kartą traukiant ištrauktas juodas rutulys. Turėsime: $A =$„b_1 arba $j_1 j_2 j_3 b_4$", $B =$„$j_1 b_2$ arba $j_1 j_2 j_3 j_4 b_5$", $C =$„$j_1 j_2 b_3$". Pasinaudoję įvykių sumos ir įvykių sandaugos tikimybių formulėmis turėsime:

$$P(A) = P(b_1) + P(j_1 j_2 j_3 b_4) =$$
$$= \frac{3}{7} + P(j_1)P(j_2 / j_1)P(j_3 / j_1 j_2)P(b_4 / j_1 j_2 j_3) =$$
$$= \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{18}{35}.$$

$$P(B)=P(j_1b_2)+P(j_1j_2j_3j_4b_5)=P(j_1)P(b_2/j_1)+$$
$$+P(j_1)P(j_2/j_1)P(j_3/j_1j_2)P(j_4/j_1j_2j_3)P(b_5/j_1j_2j_3j_4)=$$
$$=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}+\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{2}{7}+\frac{1}{35}=\frac{1}{7}\left(2+\frac{1}{5}\right)=\frac{11}{35}.$$

$$P(C)=P(j_1j_2b_3)=P(j_1)P(j_2/j_1)P(b_3/j_1j_2)==\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot=\frac{6}{35}.$$

9. Pažymėkime S – sudužo viena plaunama lėkštė. A – plovė Alė, D – plovė Dalė, V – plovė Valė.

$$S=S\cap(A\cup D\cup V)=(S\cap A)\cup(S\cap D)\cup(S\cap V).$$

Todėl

$$P(S)=P(A\cap S)+P(D\cap S)+P(V\cap S)=$$
$$=P(A)P(S/A)+P(D)P(S/D)+P(V)P(S/V)=$$
$$=0{,}4\cdot 0{,}02+0{,}3\cdot 0{,}03+0{,}3\cdot 0{,}02=0{,}023.$$

Tikimybė, kad lėkštę sudaužė Alė yra $P(A/S)$.

Kadangi $P(A\cap S)=P(S)P(A/S)$, tai

$$P(A/S)=\frac{P(A\cap S)}{P(S)}=\frac{P(A)P(S/A)}{P(S)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}02}{0{,}023}=\frac{0{,}008}{0{,}023}=\frac{8}{23}.$$

Analogiškai $P(D/S)=\frac{0{,}3\cdot 0{,}03}{0{,}023}=\frac{9}{23}$, $P(V/S)=\frac{0{,}3\cdot 0{,}02}{0{,}023}=\frac{6}{23}$.

10. Pažymėkime X – „Zuikio“ dviejų rungtynių taškų sumą. Galimos X reikšmės yra 4, 3, 2, 1, 0. Reikia apskaičiuoti tikimybes

$$P(X=4), P(X=3), P(X=2), P(X=1), P(X=0).$$

Tai paprasčiausia atlikti sudarius „eksperimento“ elementariųjų įvykių aibę, apskaičiavus elementariųjų įvykių tikimybes ir mus dominančius įvykius išreiškus elementariaisiais.

Pažymėkime T_i, L_i, N_i – „Zuikis“ atitinkamai laimėjo, sužaidė lygiosiomis, pralaimėjo i-ąsias rungtynes. Turėsime $E=\{N_1N_2, N_1L_2, N_1T_2, L_1N_2, L_1L_2, L_1T_2, T_1N_2, T_1L_2, T_1T_2\}$.

Duota $P(L_i)=\frac{1}{4}$, $P(T_i)=\frac{1}{3}$, todėl

$$P(N_i) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}.$$

$$(X = 0) = N_1 N_2\,,\;\; P(X = 0) = P(N_1) \cdot P(N_2) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{144}.$$

Tuomet gauname:

$$(X = 1) = (N_1 L_2) \cup (L_1 N_2)\,,\;\; P(X = 1) = \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4} \right) 2 = \frac{30}{144};$$

$$(X = 2) = (L_1 L_2) \cup (T_1 N_2) \cup (N_1 T_2),$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} \right) 2 = \frac{49}{144};$$

$$(X = 3) = (L_1 T_2) \cup (T_1 L_2)\,,\;\; P(X = 3) = \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \right) 2 = \frac{24}{144};$$

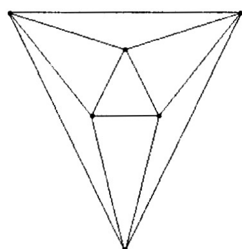
$$(X = 4) = T_1 T_2\,,\;\; P(X = 4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{144}.$$

Tikimybių skirstinys (lentelė) yra toks:

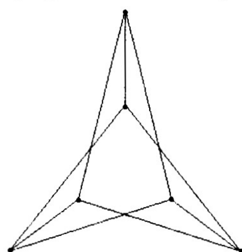
x_k	0	1	2	3	4
$P(X = x_k)$	$\frac{25}{144}$	$\frac{30}{144}$	$\frac{49}{144}$	$\frac{24}{144}$	$\frac{16}{144}$

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

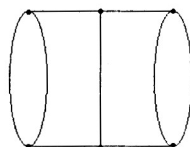
1. a) Vienas tokio grafo pavyzdys pavaizduotas 1 pav.



1 pav.



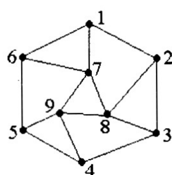
2 pav.



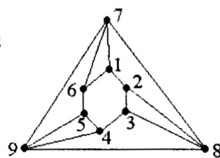
3 pav.

b) Vienas tokio grafo pavyzdys pavaizduotas 2 pav.
Galimi ir kiti variantai, sakykime, kaip 3 pav.

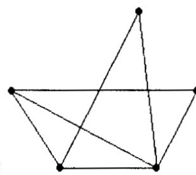
2. 1) Taip.



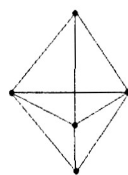
A



B`



C



D

2) Grafai C ir D nėra izomorfiniai, nes pirmajame grafe – tik viena viršūnė, kurios laipsnis lygus 4, o grafe D tokių viršūnių yra trys.

3. Sakykime, kad *X* apskrityje yra du miesteliai *A* ir *B*, kurių nejungia vieškelis. Pagal sąlygą iš miestelio *A* išeina mažiausiai 8 vieškeliai, jungiantys miestelį *A* su 8 skirtingais miesteliais. Analogiškai samprotaudami gauname, kad iš miestelio *B* taip pat išeina 8 vieškeliai, jungiantys 8 skirtingus miestelius. Taigi *X* apskrityje yra du kelių tinklai: viename tinkle yra 9 skirtingi miesteliai (jam priklauso miestelis *A*) ir kitame tinkle – taip pat 9 skirtingi miesteliai (jam priklauso miestelis *B*). Tarp jų nėra nei vieno miestelio, priklausančio abiem kelių tinklams. Jeigu toks miestelis

būtų, tai iš miestelio A per šį miestelį būtų galima patekti į miestelį B. Vadinasi, X apskrityje būtų 18 miestelių. Tai prieštarauja uždavinio sąlygai.

Taigi X apskrityje iš bet kurio miestelio galima nuvažiuoti į bet kurį kitą miestelį.

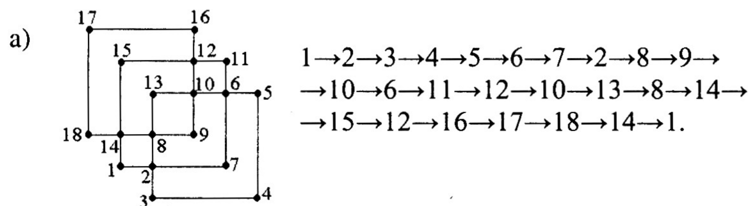
4. Jeigu klasėje tokia situacija būtų, tai ją atitiktų grafas, turintis 25 viršūnes (klasės mokiniai): vienuolikos viršūnių laipsnis – 3 (draugai), aštuonių laipsnis – 2 ir šešių laipsnis – 5. Taigi visų viršūnių laipsnių suma yra nelyginis skaičius:

$$11 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 6 \cdot 5 = 33 + 16 + 30 = 79 .$$

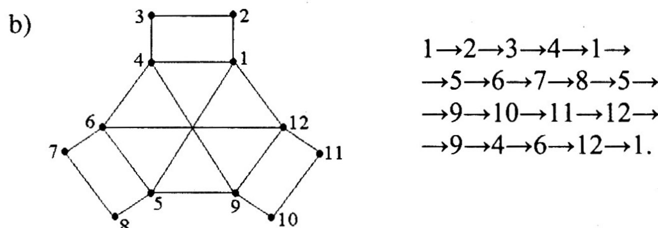
Tai prieštarauja pirmajai teoremai.
Vadinasi, klasėje tokios situacijos būti negali.

5. Jeigu tokį telefono tinklą būtų galima suprojektuoti, tai jį atitiktų grafas, turintis 27 (sodininkai) viršūnes, kurių kiekvienos laipsnis yra 5 (telefono linijos). Grafo viršūnių laipsnių suma būtų 135 – nelyginis skaičius. Tai prieštarauja pirmajai teoremai.

6. Oilerio ciklas pavaizduotas brėžinyje

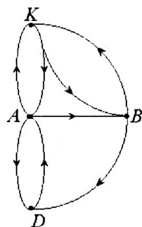


$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 2 \to 8 \to 9 \to$
$\to 10 \to 6 \to 11 \to 12 \to 10 \to 13 \to 8 \to 14 \to$
$\to 15 \to 12 \to 16 \to 17 \to 18 \to 14 \to 1.$



$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1 \to$
$\to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 5 \to$
$\to 9 \to 10 \to 11 \to 12 \to$
$\to 9 \to 4 \to 6 \to 12 \to 1.$

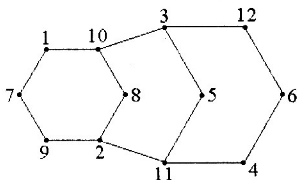
7. Nubraižykime grafą, kurio viršūnės *A*, *B*, *K*, *D* – dvi salos ir du krantai, o briaunos – juos jungiantys tiltai.



a) Kadangi šis grafas turi dvi nelyginio laipsnio viršūnes (*A* ir *D*), tai Oilerio ciklo nėra, t.y. negalima apeiti visų tiltų po vieną kartą ir grįžti į tą pačią vietą.

b) Oilerio kelias turi prasidėti nelyginio laipsnio viršūnėje, o baigtis kitoje nelyginio laipsnio viršūnėje. Brėžinyje pavaizduotas kelias prasideda taške *A*, o baigiasi taške *D*.

8. 1. a) Grafas, kurio viršūnės yra lentos langeliai, o briaunos – leistini žirgo ėjimai, pavaizduotas brėžinyje.



b) Hamiltono kelias: 1→7→9→2→8→10→3→5→11→4→6→12.

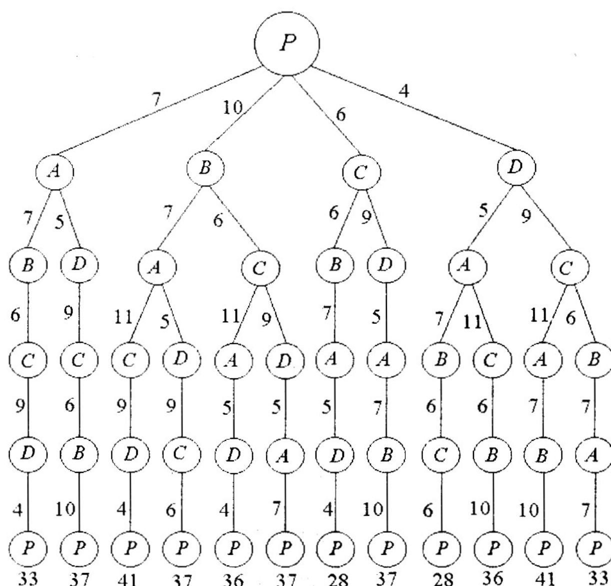
8. 2. Sunumeruokite „šachmatų lentos" langelius taip, kaip parodyta paveikslėlyje.

	12	3	
2	7	10	5
11	4	1	8
	9	6	

Hamiltono ciklas:

1→2→3→4→5→6→7→8→9→10→11→12→1.

9. Nubraižykime paštininko kelionės maršrutų medį (visus Hamiltono ciklus):



Taigi mažiausią svorį turi du ciklai: *PCBADP* ir *PDABCP*. Jais keliaudamas paštininkas sugaišta 28 minutes.

10. Pasirinkime dvi planetas, *A* ir *B*, tarp kurių atstumas mažiausias. Pagal uždavinio sąlygą šių planetų astronomai stebi vienas kito planetą. Jeigu bent vienas iš likusių $n-2$ astronomų stebėtų planetą *A* arba *B*, tai viena iš $n-2$ planetų liktų be stebėtojo. Priešingu atveju iš šių $n-2$ planetų vėl pasirenkame dvi, tarp kurių atstumas mažiausias ir tęsiame analogišką analizę. Kai planetų skaičius nelyginis, tai galiausiai liks viena nestebima planeta.

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

Užd. Nr.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Ats.	(0; 0,5]	165150	(6; +∞)	–6	0,5	0,5

Baigiamąją užduotį skaitytojui siūlome išspręsti savarankiškai.

